PERIODICAL
UNIVERSITY OF
LIBRARY
5852-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

59. BAND, 1. HEFT
(AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1955)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1955

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

59. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Weier, J. Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten 1

Pinl, M. und **K. Schuff.** Zur Theorie der Hermiteschen Kreise 22

Kantz, G. Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer analytischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion 27

Hornich, H. Überall unlösbare lineare partielle Differentialgleichungen . . 34

Prachar, K. Über die Summe $\sum_{p \leq N} e(a\,p)$ 43

Brauner, H. Quadriken als Bewegflächen 45

Buchbesprechungen 64

Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten.

Von

Josef Weier, Fulda.

(Eingelangt am 11. August 1954.)

Ist P_0 ein endliches Euklidisches Polyeder, f eine stetige Abbildung von P_0 in sich und ε eine positive Zahl, so existiert[1] eine zu f homotope Abbildung φ von P_0 in sich, die von f um weniger als ε entfernt ist, höchstens endlich viele Fixpunkte und überdies die Eigenschaft hat: zu jedem Fixpunkt q von φ existiert eine in P_0 offene zu einer Vollkugel homöomorphe Menge $\ni q$. Diesen Satz kann man auch für topologische Mannigfaltigkeiten beweisen[2]: Wenn P_1 eine topologische Mannigfaltigkeit, g eine stetige Abbildung von P_1 in sich und ε eine positive Zahl, so gibt es eine zu g homotope Abbildung γ von P_1 in sich, die von g um weniger als ε entfernt ist und in jeder kompakten Teilmenge von P_1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Es bedeute n eine natürliche Zahl, P eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit in dem n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum R^n und $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich. Die im folgenden über $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ hergeleiteten Sätze behalten wegen des *Menger*schen Einbettungssatzes[3] ihre Gültigkeit in beliebigen kompakten topologoschen Mannigfaltigkeiten.

Ist p ein Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des R^n und τ irgendeine Zahl, so bezeichnen wir den Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \tau)$ des R^{n+1} auch mit (p, τ). Wir gebrauchen für den Punkt $f^\tau(p)$ auch das Zeichen $F(p, \tau)$. Dann läßt sich F als eine Abbildung der Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1}, für

---

[1] *H. Hopf*, Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Z. 29, 493—524 (1929).

[2] *G. Hirsch*, Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes. Bull. Sci. math. 67, 158—168 (1943).

[3] *K. Menger*, Dimensionstheorie. Berlin (1928).

die $p \in P$ und τ eine Zahl aus $[0, 1]$ ist, in P deuten. Und es ist $F = (f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$. Die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p = f^\tau(p)$ nennen wir das „*singuläre Gebilde*" von F. — Sind α_0, α_1 Zahlen aus $[0, 1]$ mit $\alpha_0 < \alpha_1$ und ist jeder Zahl τ aus $[\alpha_0, \alpha_1]$ ein Punkt $a^\tau = a(\tau)$ des R^n zugeordnet, ferner die Abbildung a stetig, so bezeichnen wir die Menge der Punkte (a^τ, τ), $\alpha_0 \leqq \tau \leqq \alpha_1$, des R^{n+1} auch kürzer mit $(a^\tau, \alpha_0 \leqq \tau \leqq \alpha_1)$ und nennen sie eine „Kurve".

Man kann nun, wie wir zeigen werden, $F = (f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ durch eine Schar $\Phi = (\varphi^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen φ^τ von P in sich derart approximieren, daß *erstens* für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung φ^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat und *zweitens* das singuläre Gebilde von Φ entweder leer ist oder aus endlich vielen Kurven $(a^\tau, \alpha_0 \leqq \tau \leqq \alpha_1)$ besteht; näherhin:

Zu der Abbildungsschar $F = (f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ und der positiven Zahl ε existieren eine Schar $\Phi = (\varphi^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen φ^τ von P in sich und endlich viele Kurven

$$A_i = (a_i^\tau, \alpha_{i0} \leqq \tau \leqq \alpha_{i1}), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

von Punkten a_i^τ aus P mit den Eigenschaften: für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist φ^τ zu f^τ homotop, φ^τ von f^τ um weniger als ε entfernt und die Anzahl der Fixpunkte von φ^τ endlich; bedeutet A das singuläre Gebilde von Φ, so ist entweder A leer oder $A = \Sigma A_i$; die Mengen $(a_i^\tau, \alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1})$, $i = 1, \ldots, m$, des R^{n+1} sind paarweis zueinander fremd.

Eine Abbildungsschar, deren singuläres Gebilde nach Art der Schar Φ entweder leer oder sich aus endlich vielen Kurven A_i, die bis auf ihre Endpunkte $(a_i^{\alpha_{i0}}, \alpha_{i0})$ und $(a_i^{\alpha_{i1}}, \alpha_{i1})$ paarweis zueinander fremd sind, zusammensetzt, bezeichnen wir als „*endlich*".

Verzichtet man auf eine nähere Beschreibung des singulären Gebildes von Φ, so liefert das obige Theorem die kürzere Aussage: *Zu der Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ und der positiven Zahl ε existiert eine Schar $(\gamma^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen γ^τ von P in sich, so daß für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung γ^τ zu f^τ homotop, von f^τ um weniger als ε entfernt ist und höchstens endlich viele Fixpunkte hat.* Dieser Satz stellt, für P, die genaue Verallgemeinerung des oben zitierten *Hopf*schen Approximationssatzes von einer Abbildung auf eine Abbildungsschar dar. Wie wir zeigen werden, läßt sich folgender Zusatz machen: Wenn f^0 und ebenso f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat, kann man verlangen, daß $\gamma^0 = f^0$ und $\gamma^1 = f^1$.

Sieht man von einer Beschränkung durch die Zahl ε ab, so ergibt sich ein Satz, den ich an anderer Stelle, ohne ihn dort zu beweisen, zur Herleitung der Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten benutzt habe: *Sind h, h' homotope Abbildungen von P in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so existiert eine Schar $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen h^τ von P in sich mit $h^0 = h$, $h^1 = h'$ und der Eigenschaft, daß für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Anzahl der Fixpunkte von h^τ endlich ist.*

1. Ein Satz im Kleinen.

Über topologische Mannigfaltigkeiten handelnde Sätze sind gelegentlich nur scheinbar Sätze im Großen, das soll heißen, Sätze, zu deren Herleitung wesentlich die ganze Mannigfaltigkeit und nicht nur kleine Teile derselben zu betrachten sind. Es läßt sich also bisweilen ein Kern im Kleinen finden, dessen endlichfache Anwendung den Satz im Großen liefert. Diesen Sachverhalt begegnet man auch im Fall der oben ausgesprochenen Approximationssätze. Der im vorliegenden Abschnitt hergeleitete Satz im Kleinen (Satz 1) stellt in den Beweisen der Abschnitte 2 und 3 das wesentliche Stück dar.

Einige Bemerkungen zur *Bezeichnungsweise*. Wenn $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ Punkte des n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraumes R^n sind, so ist $\varrho(a, b)$ die Entfernung von a und b, $a + b$ der Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$, $\overrightarrow{a\,b}$ der Punkt $b - a$ und $\bar{a}$ die aus dem Punkt a bestehende Menge. Im R^n liegende Simplexe sind stets offen und gradlinig. Ordnet die Abbildung f jedem Punkt p der Menge A genau einen Punkt der Menge B zu, so bedeutet $f(p)$ den betreffenden Punkt, aber nicht die ganze Abbildung.

Die folgenden Hilfssätze bereiten den Beweis von Satz 1 vor.

Hilfssatz 1. *Es seien j und r natürliche Zahlen, S ein j-dimensionales Simplex im R^r, q der Nullpunkt des R^r und f eine stetige Abbildung von $\bar{S}$—S in den R^r ohne Nullstelle. Dann kann man f derart stetig über S fortsetzen, daß gilt: wenn $j = r$, hat f genau eine Nullstelle; wenn $j < r$, hat f keine Nullstelle.*

Beweis. Wenn *erstens* $j = r$, so bedeute a einen Punkt aus S, $w(p)$ für $p \in \bar{S} - a$ die Projektion von p auf $\bar{S}$—S aus a. Ist dann $f^1(a) = q$ und

$$f^1(p) = q + (1 - \tau)\,\overrightarrow{q\,f\,w(p)}$$

für alle Punkte p aus $\bar{S} - a$ mit $p = a + (1 - \tau)\,\overrightarrow{a\,w\,(p)}$, so stellt f^1 eine

stetige Fortsetzung von f über S mit den im Hilfssatz verlangten Eigenschaften dar.

Zweitens sei $j < r$. Bezeichnet T ein j-dimensionales Simplex mit $\overline{T} \subset S$, so gibt es zunächst, wie man sich leicht überlegt, eine stetige Abbildung g von $\overline{S}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{S} - S$ ist $g(p) = f(p)$; für $p \in \overline{S} - T$ ist $q \neq g(p)$; auf $\overline{T}$ ist g simplizial.

Es bedeute K eine solche simpliziale Zerlegung von $\overline{T}$, daß gilt: auf jedem Simplex von K ist g affin; wenn U ein Simplex aus K mit $\overline{U}$. $(\overline{T} - T) \neq 0$, so ist $g(\overline{U})$ zu q fremd. Da $g(\overline{T} - T)$ zu q fremd und g auf $\overline{T}$ simplizial, existiert K.

Hierauf gibt es, wenn $U_1, \ldots, U_m$ die durch $\overline{U}_i$. $(\overline{T} - T) \neq 0$ bestimmten Simplexe von K sind, eine positive Zahl ε derart, daß $q \in | g'$ (ΣU_i) für jede stetige Abbildung g' von $\overline{T}$ in den R^r mit $\varrho(g, g') < \varepsilon$.

Sind $a_1, \ldots, a_n$ die Eckpunkte von K, so gibt es Punkte $b_1, \ldots, b_n$ im R^r mit $\varrho(g(a_i), b_i) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, und der Eigenschaft, daß die durch $g^1(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, bestimmte simpliziale Abbildung g^1 von $\overline{T}$ in den R^r keine Nullstelle hat.

Wenn weiter $h(a_i) = g(a_i)$ für $a_i \in \overline{T} - T$, $h(a_i) = g^1(a_i)$ für $a_i \in T$ und h die so bestimmte simpliziale Abbildung von $\overline{T}$ in den R^r bedeutet, so ist $\varrho(g(p), h(p)) < \varepsilon$ für $p \in \Sigma \overline{U}_i$ und $g^1(p) = h(p)$ für $p \in \overline{T} - \Sigma U_i$. Daher hat h keine Nullstelle.

Mit $f^2(p) = g(p)$, $p \in \overline{S} - T$, und $f^2(p) = h(p)$, $p \in \overline{T}$, ist schließlich die Abbildung f^2 eine fixpunktfreie Fortsetzung von f über S.

Hilfssatz 2. *Es seien j und r ganze Zahlen mit $0 \leqq j < r$ und S ein j-dimensionales Simplex im R^r, ferner f und f' fixpunktfreie stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in den R^r derart, daß*

$$f(p) = f'(p) \text{ für } p \in \overline{S} - S.$$

Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{S}$ in den R^r mit $f^0 = f$, $f^1 = f'$ und den weiteren Eigenschaften: in allen (p, τ), für die $p \in \overline{S} - S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $f^\tau(p) = f(p)$; für $\tau \neq \frac{1}{2}$ hat f^τ keinen Fixpunkt; wenn $j < r - 1$, hat $f^{\frac{1}{2}}$ keinen Fixpunkt; wenn $j = r - 1$, hat $f^{\frac{1}{2}}$ genau einen Fixpunkt.

Beweis. Es seien a ein Punkt aus S und v ein Vektor $\neq 0$ des R^r, der senkrecht auf S steht; ferner a^τ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ der Punkt $a + (1 - 2\tau)v$. Wenn τ eine Zahl aus $[0, 1]$, so ist $\overline{a^\tau p} - p$ für jedem Punkt p aus $\overline{S} - S$ eine halboffene Strecke. Die Vereinigungsmenge $\Sigma \overline{a^\tau p} - p$, $p \in \overline{S} - S$, aller Strecken $\overline{a^\tau p} - p$, wobei p die Menge $\overline{S} - S$ durchläuft, bezeichnen wir mit S^τ.

Dann ist die Menge $T = \Sigma S^\tau - (S^0 + S^1)$ zu einem Simplex homöomorph. Für $p \in \overline{T}$ sei $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{S}$, weiter $w^\tau(p)$ für alle (p, τ) mit $p \in \overline{T}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Projektion von p auf $\overline{S}^\tau$ parallel zu v.

Wenn hierauf $g(p) = p + \overrightarrow{w(p)\, f\, w(p)}$ für $p \in \overline{S}^0$ und $g(p) = p + \overrightarrow{w(p)\, f'\, w(p)}$ für $p \in \overline{S}^1$, so ist g eine stetige Abbildung von $\overline{T} - T$ in den R^r ohne Fixpunkte. Daher gibt es, wie leicht aus Hilfssatz 1 folgt, eine stetige Abbildung h von $\overline{T}$ in den R^r, die auf $\overline{T} - T$ mit g übereinstimmt und die weitere Eigenschaft hat: wenn $\dim T = r$, also $j = r - 1$, ist a der einzige Fixpunkt von h; wenn $\dim T < r$, also $j < r - 1$, hat h keinen Fixpunkt.

Ist alsdann $f^\tau(p) = p + \overrightarrow{w^\tau(p)\, h\, w^\tau(p)}$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{S}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, so hat die Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ die verlangten Eigenschaften: Für $p \in \overline{S}$ ist $h\, w^0(p) = g\, w^0(p)$ und $w\, w^0(p) = p$, daher $f^0(p) = p + h\, w^0(p) - w^0(p) = p + g\, w^0(p) - w^0(p) = p + (w^0(p) + f\, w\, w^0(p) - w\, w^0(p)) - w^0(p) = p + w^0(p) + f(p) - p - w^0(p) = f(p)$, mithin $f^0 = f$. Die übrigen Eigenschaften bestätigt man ebenso.

Satz 1. *Es seien j und r ganze Zahlen mit $0 \leqq j \leqq r$, U eine offene Menge im R^r, S ein j-dimensionales Simplex mit $S \subset U$; ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in den R^r, über die gilt: g und ebenso h hat höchstens endlich viele Fixpunkte,*

$$p \neq g(p) \text{ und } p \neq h(p) \text{ für } p \in \overline{S},\ g(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{S} - S.$$

Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{U}$ in den R^r mit den Eigenschaften:

$$g^1(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{S};$$

in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{U}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{U} - U$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $g^\tau(p) = g(p)$; die Abbildungsschar $(g^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist endlich.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Schar $(\gamma^\tau\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen γ^τ von $\overline{S}$ in den R^τ mit den Eigenschaften: in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{S}$ und $\tau = 0$ oder $p \in S - \overline{S}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $\gamma^\tau(p) = g(p)$; für $p \in \overline{S}$ ist $\gamma^1(p) = h(p)$; für $\tau \neq \frac{1}{2}$ ist die Abbildung γ^τ ohne Fixpunkte; wenn $j < r - 1$, hat die Abbildung $\gamma^\tau, \tau = \frac{1}{2}$, keinen Fixpunkt; wenn $j = r - 1$, hat die Abbildung $\gamma^\tau, \tau = \frac{1}{2}$, genau einen Fixpunkt.

Beweis im Fall $j < r - 1$. In allen (p, τ) mit $p \in \overline{S}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $p \neq \gamma^\tau(p)$; wegen der Kompaktheit von $\overline{S}$ gibt es daher eine positive Zahl η derart, daß sogar

$$\varrho(p, \gamma^\tau(p)) > \eta. \tag{2}$$

in den (p, τ) mit $p \in \overline{S}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Wir bezeichnen mit w eine stetige Abbildung von $\overline{U}$ auf $\overline{S}$ derart, daß $w(p) = p$ für $p \in \overline{S}$. In allen (p, τ) mit $p \in \overline{U}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ bedeute $w^\tau(p)$ den Punkt $(1 - \tau)\, p + \tau\, w(p)$.

Dann existiert, wie man sich leicht überlegt, eine offene Menge $V \supset S$ im R^r, über die gilt:

$$p \neq g\, w^\tau(p), \quad p \neq \gamma^\tau\, w^1(p), \quad p \neq h\, w^\tau(p) \tag{3}$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $p \in \overline{V}$ liegt die Strecke $\overline{p\, w(p)}$ in $\overline{U}$.

Wir ordnen nun jedem (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $0 \leqq \tau \leqq 3$ einen Punkt $f^\tau(p) = F(p, \tau)$ zu. Und zwar sei $f^\tau(p)$ der Punkt

$$g\, w^\tau(p), \quad \gamma^{\tau-1}\, w^1(p), \quad h\, w^{3-\tau}(p), \tag{4}$$

je nachdem $0 \leqq \tau \leqq 1$, $1 \leqq \tau \leqq 2$ oder $2 \leqq \tau \leqq 3$ ist. Wegen $g\, w^1 = \gamma^0\, w^1$ und $\gamma^1\, w^1 = h\, w^1$ ist die Abbildung F stetig. Wegen (3) ist

$$p \neq f^\tau(p) \text{ für } p \in \overline{V} \text{ und } 0 \leqq \tau \leqq 3. \tag{5}$$

Bezeichnet p einen Punkt aus $\overline{S} - S$, so ist $\gamma^\tau(p) = g(p) = h(p)$ und $w^\tau(p) = p$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, mithin

$$f^\tau(p) = g(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{S} - S \text{ und } 0 \leqq \tau \leqq 3. \tag{6}$$

Wenn $\lambda(p) = \varrho(p, \overline{V} - V)/(\varrho(p, \overline{V} - V) + \varrho(p, \overline{S}))$ für $p \in V - \overline{S}$, $\lambda(p) = 0$ für $p \in \overline{U} - V$ und $\lambda(p) = 1$ für $p \in S$, so bezeichnet λ eine eindeutige Abbildung von $\overline{U}$ in $[0, 1]$. Ist p ein Punkt aus $\overline{U}$, in dem die Abbildung λ unstetig, so liegt p wegen $S \subset V$ in $\overline{S} - S$.

Hierauf sei $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{U} - V$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$,

$$g^\tau(p) = f^{3\,\lambda(p)\,\tau}(p) \tag{7}$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Statt $g^\tau(p)$ schreiben wir auch $G(p, \tau)$. Die Abbildung G ist stetig, da jeder Unstetigkeitspunkt von λ in $\overline{S} - S$ liegt und (6) gilt. Wegen (5) stimmen für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildungen g und g^τ in ihren Fixpunkten überein. Für $p \in \overline{S}$ ist $\lambda(p) = 1$, daher $g^1(p) = f^3(p) = h(p)$.

Beweis im Fall $j = r - 1$. Die Bedeutung von a, v, a^τ, S^τ, T, w und w^τ sei die gleiche wie im Beweis zu Hilfssatz 2. Man kann annehmen, daß $T \subset U$. Wegen $p \neq g(p) = h(p)$, $p \in \overline{S}$, kann man weiter annehmen, daß auf $\overline{T}$ kein Fixpunkt von g und ebenso kein solcher von h liegt. Wie bezeichnen die offene Menge $\Sigma\, S^\tau$, $^1/_4 < \tau < {}^3/_4$, mit T^0.

Zunächst wollen wir zeigen:

I. *Es gibt eine Schar* $(f_0^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *stetiger Abbildungen* f_0^τ *von* $\overline{U}$ *in den* R^r *mit den Eigenschaften: in allen* (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{U}$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in \overline{U} - U$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$, *ist* $f_0^\tau(p) = g(p)$; *für* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *stimmen die Abbildungen* f_0^τ *und* g *in ihren Fixpunkten überein; wird die Abbildung* f_0^1 *auch mit* f *bezeichnet, so ist*

$$f(p) = p + \overrightarrow{w(p)\, g\, w(p)} \text{ für } p \in \overline{T}^0. \tag{8}$$

Beweis von I. Es bedeute ζ eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ auf sich, und zwar sei $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1/4) = \zeta(3/4) = 1/2$, $\zeta(1) = 1$, für die übrigen Zahlen aus $[0, 1]$ werde linear fortgesetzt.

Dann sei $f_0^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{U} - T$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; in den (p, τ) mit $p \in \overline{S}^\sigma$, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, und $0 \leqq \tau \leqq 1$ weiter

$$f_0^\tau(p) = p + \overrightarrow{w^{\lambda(p,\tau)}(p)\, g\, w^{\lambda(p,\tau)}(p)}, \tag{9}$$

wobei $\lambda(p, \tau) = (1 - \tau)\, \sigma + \tau\, \zeta(\sigma)$. In den Punkten p aus $\overline{S} - S$ ist die Zahl $\lambda(p, \tau)$ nicht eindeutig bestimmt; jedoch ist $w^\sigma(p) = p$, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, in diesen Punkten, daher die Erklärung (9) eindeutig. Wenn p einen Punkt aus $(\overline{T} - T) - (\overline{S} - S)$ und σ die durch $p \in S^\sigma$ bestimmte Zahl bedeutet, so ist $\zeta(\sigma) = \sigma$, daher $\lambda(p, \tau) = \sigma$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, also $w^{\lambda(p,\tau)}(p) = p$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$; mithin: Für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist die Abbildung f_0^τ stetig.

Da g auf $\overline{T}$ ohne Fixpunkt, ist für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung f_0^τ auf $\overline{T}$ ohne Fixpunkt. Wenn $p \in \overline{S}^\sigma$ und $1/4 \leqq \sigma \leqq 3/4$, also $p \in \overline{T}^0$, ist $\lambda(p, 1) = \zeta(\sigma) = 1/2$, daher $w^{\lambda(p,1)}(p) = w(p)$. Also ist auch (8) richtig und somit $(f_0^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar von der in I verlangten Art.

Weiter wollen wir zeigen:

II. *Es gibt eine Schar* $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *stetiger Abbildungen* f^τ *von* $\overline{T}^0$ *in den* R^r *mit den Eigenschaften: in allen* (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{T}^0$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in \overline{S} - S$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$, *ist* $f^\tau(p) = f(p)$; *für alle* τ *aus* $[0, 1/4) + (3/4, 1]$ *hat die Abbildung* f^τ *keinen Fixpunkt; für* $1/4 \leqq \tau \leqq 3/4$ *ist der in* S^τ *liegende Punkt* a^τ *der einzige Fixpunkt von* f^τ.

Beweis von II. Für $1/4 \leqq \sigma \leqq 3/4$ sei μ^σ wie folgt als Abbildung von $[0, 1]$ auf sich bestimmt: $\mu^\sigma(0) = 0$, $\mu^\sigma(\sigma) = 1/2$, $\mu^\sigma(1) = 1$, für die übrigen Zahlen aus $[0, 1]$ werde linear fortgesetzt. Ist p ein Punkt aus S^σ und $1/4 \leqq \sigma \leqq 3/4$, so bezeichnen wir die Zahl $\mu^\sigma(\tau)$ auch mit $\mu(p, \tau)$.

Alsdann sei $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{S} - S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$;

$$f^\tau(p) = p + \overrightarrow{w(p)\, \gamma^{\mu(p,\tau)}\, w(p)} \tag{10}$$

in den (p, τ) mit $p \in S^\sigma$, $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$, und $0 \leqq \tau \leqq 1$. Die so erklärten Abbildungen f^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, sind von der in II verlangten Art:

Sind α eine Zahl aus $[0, 1]$, ε eine positive Zahl, p ein Punkt aus S und $\varrho(p, \overline{S} - S)$ nur hinreichend klein, so sind die Punkte $\gamma^\sigma w(p)$ und $g(p)$, ebenso die Punkte $g(p)$ und $f(p)$ um weniger als ε voneinander entfernt. Daher ist die Abbildung f^α stetig. Ja es ist, wie man leicht bestätigt, sogar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar.

Wenn σ eine Zahl aus $[^1/_4, {}^3/_4]$ und p ein Punkt aus S^σ, so ist $\mu(p, \vartheta) = 0$ und $\gamma^0 w(p) = g\, w(p)$, daher $f^0(p) = p + \overrightarrow{w(p)\, g\, w(p)}$, wegen (8) also $f^0(p) = f(p)$.

In den (p, τ) mit $p \in \overline{S} - S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $p \neq f^\tau(p)$, da $p \neq f(p)$ für $p \in \overline{S} - S$. — Sind σ eine Zahl aus $[^1/_4, {}^3/_4]$, τ eine Zahl aus $[0, {}^1/_4) + {}^3/_4, 1]$ und p ein Punkt aus S^σ, so ist $\mu(p, \tau) \neq {}^1/_2$ und daher $\gamma^{\mu(p,\tau)} w(p) - w(p) \neq 0$, somit $p \neq f^\tau(p)$. — Wenn (p, τ) ein Punkt mit $p \in S^\sigma$, $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$, und $^1/_4 \leqq \tau \leqq {}^3/_4$ sowie $p = f^\tau(p)$, ist $\gamma^{\mu(p,\tau)} w(p) = w(p)$, daher $\mu(p, \tau) = {}^1/_2$ und $w(p) = a$, also $\sigma = \tau$ und $p = a^\tau$. Umgekehrt ist, wenn $\sigma = \tau$ und $p = a^\tau$, der Punkt p Fixpunkt von f^τ. Mithin: für $^1/_4 \leqq \tau \leqq {}^3/_4$ ist a^τ der einzige Fixpunkt von f^τ.

Schließlich wollen wir zeigen:

III. *Es gibt eine Schar* $(f_1^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *stetiger Abbildungen* f_1^τ *von* $\overline{U}$ *in den* R^r *mit den Eigenschaften: in allen* (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{U}$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in \overline{U} - T^0$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$, *ist* $f_1^\tau(p) = f(p)$; *für* $0 \leqq \tau < {}^1/_2$ *hat* f_1^τ *auf* $\overline{T}^0$ *keinen Fixpunkt; für* $\tau = {}^1/_2$ *ist* a *der einzige Fixpunkt von* f_1^τ *auf* $\overline{T}^0$; *für* $^1/_2 < \tau \leqq 1$ hat f_1^τ *auf* $\overline{T}^0$ *genau zwei Fixpunkte, nämlich die Punkte* a^σ *mit* $\sigma = \dfrac{\tau}{4\tau - 1}$ *und* $\sigma = \dfrac{3\tau}{1 + 4\tau}$; *für* $p \in \overline{S}$ *ist* $f_1^1(p) = h(p)$.

Beweis von III. Jedem Zahlenpaar (σ, τ) mit $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ordnen wir eine Zahl $\xi(\sigma, \tau)$ zu. Und zwar sei

$$\xi(\sigma, \tau) = (4\sigma - 1)\tau \quad \text{oder} \quad \xi(\sigma, \tau) = (3 - 4\sigma)\tau, \tag{11}$$

je nachdem $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^1/_2$ oder $^1/_2 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$ ist. Hierauf setzen wir $f_1^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{U} - T^0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; und

$$f_1^\tau(p) = f^{\xi(\sigma,\tau)}(p) \tag{12}$$

in den (p, τ) mit $p \in S^\sigma$, $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$, und $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Es bedeute α eine Zahl aus $[0, 1]$. Zum Beweis, daß die Abbildung f^α stetig, genügt es, die Stetigkeit von f^α in den Punkten p aus $\overline{T}^0 - T^0$ nachzuprüfen. Erstens liege p in S^σ mit $\sigma = {}^1/_4$ oder $\sigma = {}^3/_4$. Dann ist

$f_1^{\alpha}(p) = f(p)$ nach der einen und $f_1^{\alpha}(p) = f^{\xi(\sigma,\alpha)}(p)$ nach der anderen Erklärung. Wegen $\xi(\sigma, \alpha) = 0$ und $f^0(p) = f(p)$ stimmen aber die beiden Erklärungen überein. Bezeichnet zweitens p einen Punkt aus $\overline{S} - S$, so ist $f_1^{\alpha}(p) = f(p)$. Wenn nun ε eine positive Zahl und q ein Punkt aus T^0 mit nur hinreichend kleinem $\varrho(p, q)$, so haben für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Punkte $f^{\tau}(q)$ und $f^0(q) = f(q)$ einen Abstand $< \varepsilon$. Daher ist f^{α} in p stetig.

Wie man sich leicht überlegt, ist nicht nur die Abbildung f_1^{α} stetig, sondern sogar $(f_1^{\tau}, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar. Zum Beweis, daß $(f_1^{\tau}, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ von der in III angegebenen Art, bemerken wir zunächst: wegen II liegt für alle (σ, τ) mit $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ dann und nur dann auf $\overline{S}^{\sigma}$ ein Fixpunkt von f_1^{τ}, wenn $\xi(\sigma, \tau) = \sigma$; in diesem Fall ist a^{σ} der auf $\overline{S}^{\sigma}$ gelegene Fixpunkt von f_1^{τ}. Wir können nun den Beweis von III zu Ende führen.

Für $0 \leqq \tau \leqq {}^1/_2$ hat f_1^{τ} auf T^0 keinen Fixpunkt: *Erstens* sei $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^1/_2$. Dann ist $\xi(\sigma, \tau) = (4\sigma - 1)\tau$, wegen $2\sigma \leqq 1$ und $2\tau \leqq 1$ also $(4\sigma - 1)\tau \leqq 2\sigma\tau < \sigma$. Ist *zweitens* $^1/_2 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$, so ist $\xi(\sigma, \tau) = (3 - 4\sigma)\tau$, wegen $0 \leqq 3 - 4\sigma \leqq 1$ also $(3 - 4\sigma)\tau \leqq \tau \leqq {}^1/_2 < \sigma$.

Der einzige auf $\overline{T}^0$ gelegene Fixpunkt der Abbildung f_1^{τ}, $\tau = {}^1/_2$, ist der Punkt a. Denn wenn $\tau = {}^1/_2$ und σ eine Zahl aus $[^1/_4, {}^1/_2) + ({}^1/_2, {}^3/_4]$ bedeutet, so ist $\xi(\sigma, \tau) < \sigma$, daher f^{τ} auf S^{σ} ohne Fixpunkt. Und für $\sigma = \tau = {}^1/_2$ ist $\xi(\sigma, \tau) = {}^1/_2$, mithin: die Abbildung f_1^{τ}, $\tau = {}^1/_2$, stimmt auf S mit f^{τ}, $\tau = {}^1/_2$, überein; woraus die Behauptung folgt.

Für $^1/_2 < \tau \leqq 1$ gilt die in III über f_1^{τ} gemachte Aussage: Wenn *erstens* $^1/_4 \leqq \sigma \leqq {}^1/_2$, so ist $\xi(\sigma, \tau) = (4\sigma - 1)\tau$; ferner $\dfrac{\tau}{4\tau - 1}$ die einzige Zahl σ_0, die die Gleichung $(4\sigma_0 - 1)\tau = \sigma_0$ erfüllt; und es liegt die Zahl $\dfrac{\tau}{4\tau - 1}$ in $[^1/_3, {}^1/_2)$. Ist *zweitens* $^1/_2 \leqq \sigma \leqq {}^3/_4$, so ist $\xi(\sigma, \tau) = (3 - 4\sigma)\tau$; die Zahl $\dfrac{3\tau}{1 + 4\tau}$ ist die einzige Zahl σ_1, für die $(3 - 4\sigma_1)\tau = \sigma_1$ richtig; und es liegt $\dfrac{3\tau}{1 + 4\tau}$ in $({}^1/_2, {}^3/_5]$.

Für $p \in S$ ist, wie aus (12) folgt, $f_1^1(p) = f^1(p)$. Wegen der Stetigkeit von f_1^1 ist weiter $f_1^1(p) = f^1(p)$ sogar für $p \in \overline{S}$. Hieraus und aus (10) folgt, daß $f_1^1(p) = \gamma^1(p)$ für $p \in \overline{S}$, aus der Erklärung der Abbildungen γ^{τ} dann weiter, daß $f_1^1(p) = h(p)$ für $p \in \overline{S}$.

Hierauf ist, wie sich aus I und III ergibt, $(f_0^{\tau}, 0 \leqq \tau \leqq 1; f_1^{\tau}, 0 < \tau \leqq 1)$ eine Schar $(g^{\tau}, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ von der in obigem Satz verlangten Art.

Ersetzt man $0 \leqq j < r$ in Satz 1 durch $0 < j = r$, so erhält man den folgenden einfachen

Satz 2. *Es seien r eine natürliche Zahl, S ein r-dimensionales Simplex im R^r; ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in den R^r mit $p \neq g(p) = h(p)$, $p \in \overline{S} - S$, und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{S}$ in den R^r mit $f^0 = g$, $f^1 = h$ und den weiteren Eigenschaften: in allen (p, τ), für die $p \in \overline{S} - S$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $f^\tau(p) = g(p)$; die Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist endlich.*

Beweis. Sind q ein Punkt aus S und $q_0, \ldots, q_r$ die Eckpunkte von S, so bezeichne S^τ für $0 \leqq \tau < 1$ das Simplex mit den Eckpunkten $q + (1 - \tau)\overrightarrow{q\,q_i}$, $i = 0, \ldots, r$. Für $p \in \overline{S} - q$ bedeute $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{S} - S$ und w^τ die durch $w^\tau(p) = w(p)$, $p \in \overline{S}^\tau - S^\tau$, bestimmte affine Abbildung von $\overline{S}^\tau$ auf $\overline{S}$.

Um für $0 < \tau < 1$ eine stetige Abbildung g^τ von $\overline{S}$ in den R^r zu erklären, sei ζ eine Zahl aus $(0, 1)$, hierauf

$$g^\zeta(p) = p + (1 - \sigma)\overrightarrow{w(p)\,g\,w(p)}$$

in allen Punkten p aus $\overline{S}^\sigma - S^\sigma$ mit $0 \leqq \sigma \leqq \zeta$,

$$g^\zeta(p) = p + (1 - \zeta)\overrightarrow{w^\zeta(p)\,g\,w^\zeta(p)}$$

in den Punkten p aus $\overline{S}^\zeta$. Es sei $g^0 = g$; ferner $g^1(q) = q$ und

$$g^1(p) = p + (1 - \sigma)\overrightarrow{w(p)\,g\,w(p)}$$

in den Punkten p aus $\overline{S}^\sigma - S^\sigma$ mit $0 \leqq \sigma < 1$. Dann ist, wie man leicht bestätigt, $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine endliche Abbildungsschar.

Ersetzt man im letzten Absatz stets g durch h, so erhält man eine endliche Abbildungsschar $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ mit $h^0 = h$ und $h^1 = g^1$. Hierauf stellt $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1 : h^\tau, 1 > \tau \geqq 0)$ eine endliche Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ von der in Satz 2 angegebenen Art dar.

2. Approximation in offenen Mengen.

Der in diesem Abschnitt hergeleitete Satz 3, obschon in wenigen Worten nicht wohl charakterisierbar und ohne einen Inhalt, der sich sogleich einprägte, führt uns dem Ziel der vorliegenden Arbeit näher. Satz 3 ist, in Fortentwicklung von Satz 1, wie dieser ein Satz im Kleinen. Sein Beweis macht wesentlichen Gebrauch von Satz 1. Der Inhalt von Satz 3 erklärt sich aus dem Gang des Beweises, der im nächsten Abschnitt für den Approximationssatz geführt wird.

Satz 3. *Es seien r eine natürliche Zahl und U eine beschränkte offene Menge im R^r, weiter M eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{U} - U$; W und X beschränkte offene Mengen im R^r mit*

$$\overline{U} - M \subset W \text{ und } M \subset X;$$

ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{W}$ in den R^r, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat und über die

$$p \neq g(p) = h(p), \quad p \in \overline{X} \,.\, \overline{W},$$

gilt. Dann gibt es offene Mengen V uns Y im R^r mit

$$U \subset V, \ \overline{V} - M \subset W, \ \overline{V} - V \subset Y$$

sowie eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{W}$ in den R^r mit den Eigenschaften:

$$g^1(p) = h(p) \text{ für } p \in V;$$

$$p \neq g^1(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{Y} \,.\, \overline{W};$$

in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{U}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \dot{U} - U$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $g^\tau(p) = g(p)$; die Abbildungsschar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist endlich.

Beweis. Da M kompakt und X offen, existiert eine positive Zahl α derart, daß die 2 α-Umgebung Z von M in X liegt. Wir bezeichnen die α-Umgebung von M mit Z_1. Da $\overline{U} - Z_1$ kompakt und W offen, gibt es eine positive Zahl β, so daß die β-Umgebung von $\overline{U} - Z_1$ in W liegt.

Hierauf sei K eine simpliziale Zerlegung des R^r, der Durchmesser eines jeden Simplexes von K kleiner als min (α, β), und auf keinem Nebensimplex von K liege ein Fixpunkt von g oder h. Es bedeute K_1 den Komplex aller Grundsimplexe aus K, deren Entfernung von Z_1 Null ist, und deren Seiten; P_1 das zu K_1 gehörige Polyeder. Ferner sei K_2 der Komplex aller Grundsimplexe S von K, für die $\overline{S} \subset W$ und $S \,.\, P_1 = 0$ gilt; P_2 das zu K_2 gehörige Polyeder. Wir bezeichnen mit $J(P_1)$, $J(P_2)$, $J(P_1 + P_2)$ das Innere von P_1, P_2 beziehungsweise $P_1 + P_2$. Dann ist, wie wir nun zeigen wollen,

$$M \subset P_1 \subset X, \ P_2 \subset W, \ \dim (P_1 \,.\, P_2) < r, \tag{13}$$

$$\overline{U} \subset J(P_1 + P_2). \tag{14}$$

Daß $M \subset P_1$, $P_2 \subset W$ und dim $(P_1 \,.\, P_2) < r$ ist, folgt direkt aus der Erklärung von P_1 und P_2. Ist S ein Grundsimplex aus K_1, so ist $\overline{S} \,.\, \overline{Z}_1 \neq 0$ und also, da S einen Durchmesser $< \alpha$ hat, $\overline{S}$ in Z gelegen; mithin $\overline{S} \subset X$, daher $P_1 \subset X$; womit (13) bewiesen.

Zum Beweis von (14) bedeute q einen Punkt aus $\overline{U}$. Wenn *erstens* $q \in \overline{Z}_1$, so ist, da $\overline{Z}_1 \subset J(P_1)$ und $J(P_1) \subset J(P_1 + P_2)$, q in $J(P_1+P_2)$ gelegen. *Zweitens* seien $q \in \overline{U} - \overline{Z}_1$ und S_i die Grundsimplexe S von K mit $q \in \overline{S}$. Dann liegt q im Innern von $\Sigma \overline{S}_i$. Da jedes Simplex von K einen Durchmesser $< \beta$ hat, liegt $\Sigma \overline{S}_i$ in der β-Umgebung von q, also erst recht in der β-Umgebung von $\overline{U} - \overline{Z}_1$. Die β-Umgebung von $\overline{U} - \overline{Z}_1$ ist aber Teilmenge von W, daher $\Sigma \overline{S}_i \subset W$, mithin $\Sigma \overline{S}_i \subset P_1 + P_2$. Da q innerer Punkt von $\Sigma \overline{S}_i$, ist q erst recht innerer Punkt von $P_1 + P_2$, mithin q in $J(P_1 + P_2)$ gelegen.

Wir bezeichnen für $k = -1, 0, \ldots, r$ mit S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, die zu P_1 fremden k-dimensionalen Simplexe von K_2, mit j eine der Zahlen $-1, 0, \ldots, r-2$ und machen die Annahme, es sei bereits eine Schar $(f^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{W}$ in den R^r mit den Eigenschaften I^j bis III^j erklärt.

I^j. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{W}$ und $\tau = -2$ oder $p \in \overline{W} - W$ und $-2 \leqq \tau \leqq j$, ist $f^\tau(p) = g(p)$.

II^j. Für $p \in P_1 \cdot \overline{W} + \Sigma \overline{S}_i^j$ ist $p \neq f^j(p) = h(p)$.

III^j. Die Abbildungsschar $(f^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ ist endlich.

Da ΣS_i^{j+1} in der offenen Menge $W - P_1$ liegt, gibt es paarweis zueinander fremde offene Mengen U_i, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, mit $S_i^{j+1} \subset U_i$, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, und

$$\Sigma U_i \subset W - P_1. \tag{15}$$

Wegen II^j ist $p \neq f^j(p) = h(p)$ für $p \in \Sigma (\overline{S}_i^{j+1} - S_i^{j+1})$. Eine Anwendung von Satz 1 liefert daher für $i = 1, \ldots, m^{j+1}$ eine Schar $(f_i^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f_i^τ von $\overline{U}_i$ in den R^r mit den Eigenschaften:

$$p \neq f_i^1(p) = h(p) \quad \text{für } p \in \overline{S}^{j+1}; \tag{16}$$

in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{U}_i$ und $\tau = 0$ oder $p \in U_i - U_i$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $f_i^\tau(p) = f^j(p)$; die Abbildungsschar $(f_i^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist endlich.

Hierauf sei $f^\tau(p) = f^j(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{W} - \Sigma U_i$ und $j < \tau \leqq j+1$;

$$f^{j+\tau}(p) = f_i^\tau(p) \tag{17}$$

in allen (p, τ, i) mit $p \in \overline{U}_i$, $0 < \tau \leqq 1$ und $i = 1, \ldots, m$. Dann gelten I^{j+1} und III^{j+1} trivialerweise, II^{j+1} wegen (15) und (16).

Für $j = -1$ und $f^\tau = g$, $-2 \leqq \tau \leqq -1$, sind I^j bis III^j richtig. Mithin existiert eine Schar $(f^\tau, -2 \leqq \tau \leqq r-1)$ stetiger Abbildungen f^τ von W in den R^r, über die I^{r-1} bis III^{r-1} gilt. Und wegen Satz 2

kann man $(f^\tau, -2 \leqq \tau \leqq r-1)$ derart stetig über $(r-1, r]$ fortsetzen, daß I^r, III^r und die folgende Aussage II_1^r richtig sind.

II_r^1. Für $p \in P_1 . \overline{W}$ ist $p \neq f^r(p) = h(p)$, für $p \in P_1 . \overline{W} + P_2$ ist $f^r(p) = h(p)$.

Wenn $g^\tau = f^{(r+2)\tau-2}$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine endliche Abbildungsschar; in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{W}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{W} - W$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $g^\tau(p) = g(p)$; ferner ist

$$p \neq g^1(p) = h(p) \text{ für } p \in P_1 . \overline{W}, \tag{18}$$

$$g^1(p) = h(p) \text{ für } p \in P_1 . \overline{\overline{W}} + P_2. \tag{19}$$

Nach Voraussetzung und (14) ist $U - M \subset W$ und $\bar{U} \subset J(P_1 + P_2)$. Wegen $M \subset P_1 . \overline{W}$ und (18) befindet sich auf M kein Fixpunkt von g^1 und ebenso kein solcher von h. Es gibt daher eine offene Menge V mit

$$U \subset V, \quad \bar{V} - M \subset W, \quad \bar{V} \subset J(P_1 + P_2) \tag{20}$$

und der Eigenschaft, daß auf $\bar{V} - V$ kein Fixpunkt von g^1 und ebenso kein solcher von h liegt. Schließlich existiert, da $\bar{V} - V$ eine kompakte in $J(P_1 + P_2)$ liegende Menge und $J(P_1 + P_2)$ offen ist, eine offene Menge mit Y_1 mit

$$\bar{V} - V \subset Y_1 \subset P_1 + P_2. \tag{21}$$

Da $\bar{V} - V$ keinen Fixpunkt von g^1 und keinen solchen von h enthält, gibt es weiter eine offene Menge Y mit $\bar{V} - V \subset Y \subset Y_1$ und der Eigenschaft, daß auf $\bar{Y} . \overline{W}$ kein Fixpunkt von g^1 und kein solcher von h liegt.

Zum Nachweis, daß $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, V und Y von der in Satz 3 verlangten Art sind, genügt es nach dem Vorstehenden zu zeigen, daß $g^1(p) = h(p)$ für $p \in V$ und $p \neq g^1(p) = h(p)$ für $p \in \bar{Y} . \overline{W}$. Nun ist $\bar{V} \subset (P_1 + P_2) . \overline{W}$ nach (20), ferner $Y \subset Y_1 \subset P_1 + P_2$ nach (21), also $\bar{V} + \bar{Y} . \overline{W} \subset (P_1 + P_2) . \overline{W} = P_1 . \overline{W} + P_2$, mithin $g^1(p) = h(p)$ für $p \in \bar{V} + \bar{Y} . \overline{W}$ nach (19). Und der Erklärung von Y zufolge ist $p \neq g^1(p)$ für $p \in \bar{Y} . \overline{W}$.

Ein Sonderfall von Satz 3, gilt folgender Satz, den wir anfügen, um den Inhalt von Satz 3 zu erläutern.

Satz 4. *Sind r eine natürliche Zahl, U und W beschränkte offene Mengen im R^r mit $\bar{U} \subset W$, ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{W}$ in den R^r, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{W}$ in den R^r mit den Eigenschaften*:

$$g^1(p) = h(p) \quad \textit{für} \quad p \in \bar{U};$$

in allen (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{W}$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in \overline{W} - W$ *und* $0 \leqq \tau \leqq 1$, *ist* $g^\tau(p) = g(p)$; *die Abbildungsschar* $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *ist endlich.*

3. Approximation in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten.

Für diesen Abschnitt bedeuten r, n natürliche Zahlen und P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit in dem n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum R^n.

Wir bezeichnen, wenn m eine natürliche Zahl und $\alpha^0, \ldots, \alpha^m$ Zahlen mit $0 < \alpha^i < \alpha^{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$, sind, die geordnete Menge $(\alpha^0, \ldots, \alpha^m)$ als eine „*m-fache Überdeckungsreihe*" von P, falls für $i = 0, \ldots, m-1$ gilt: jede Menge aus P, die einen Durchmesser $< 10\,\alpha^i$ hat, ist in einer Menge aus P, die zum r-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum homöomorph und einen Durchmesser $< \alpha^{i+1}$ hat, gelegen. Dann gilt:

Bemerkung 1. *Sind* ε *eine positive Zahl und* m *eine natürliche Zahl, so existiert eine* m*-fache Überdeckungsreihe* $(\alpha^0, \ldots, \alpha^m)$ *von* P *mit* $\alpha^m < \varepsilon$.

Denn zunächst gibt es in P offene zum R^r homöomorphe Mengen U_i^m, $i = 1, \ldots, j^m$, mit $\Sigma\, U_i^m = P$ und der Eigenschaft, daß jedes U^m einen Durchmesser $< \varepsilon/2$ hat. Wir bezeichnen die Zahl $\varepsilon/2$ mit α^m. Hierauf existiert eine Zahl α^{m-1} mit $0 < \alpha^{m-1} < \alpha^m$ derart, daß jede Teilmenge aus P, deren Durchmesser $< 10\,\alpha^{m-1}$ ist, in wenigstens einer der Mengen U_i^m enthalten ist. Es seien U_i^{m-1}, $i = 1, \ldots, j^{m-1}$, in P offene zum R^r homöomorphe Mengen, so daß $\Sigma\, U_i^{m-1} = P$ und jedes U_i^{m-1} einen Durchmesser $< \alpha^{m-1}$ hat. — So fortfahrend bestätigt man Bemerkung 1.

Bemerkung 2. *Sind* U *eine in* P *offene Menge und* ε *eine positive Zahl, so gibt es in* P *offene Mengen* S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, *mit* $\Sigma\,\Sigma\, S_i^k = U$ *und den weiteren Eigenschaften: für* $i_1 \neq i_2$ *sind* $\overline{S}_{i_1}^k$ *und* $\overline{S}_{i_2}^k$ *zueinander fremd, der Durchmesser von* S_i^k *ist* $< \varepsilon$.

Zum Beweis von Bemerkung 2 überlegt man sich zunächst leicht: wenn K ein endlicher n-dimensionaler simplizialer Komplex im R^n und Q das durch K bestimmte Polyeder, so gibt es offene Mengen T_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, im R^n mit $\Sigma\,\Sigma\, T_i^k \supset Q$ und den weiteren Eigenschaften: für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{T}_{i_1}^k$ und $\overline{T}_{i_2}^k$ zueinander fremd, der Durchmesser von T_i^k ist $< \varepsilon$. Das Polyeder Q läßt sich so wählen, daß $U \subset Q$. Mit $S_i^k = T_i^k \cdot U$ sind dann die S_i^k von der verlangten Art.

Wir gelangen in drei Schritten, mit Satz 5 beginnend, über Satz 6 und 7 zu dem in Satz 8 nochmals formulierten Approximationssatz für Abbildungsscharen.

Satz 5. *Es seien* $(\alpha^0, \ldots, \alpha^n)$ *eine n-fache Überdeckungsreihe von* P, U *eine in* P *offene Menge und* g, h *stetige Abbildungen von* P *in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften:*

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in P - U,$$

für $p \in \bar{U}$ *ist* $\varrho(p, g(p)) < \alpha^0$ *und* $\varrho(p, h(p)) < \alpha^0$. *Dann existiert eine endliche Abbildungsschar* $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *in* P *mit* $\varrho(f^\tau, g) < \alpha^n$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, *sowie* $f^0 = g$ *und* $f^1 = h$.

Beweis. Statt α^0 schreiben wir auch α^{-1}. Wegen der Kompaktheit von $\bar{U}$ existiert eine in P offene Menge U' mit $\bar{U} \subset U'$ und der Eigenschaft, daß $\varrho(p, g(p)) < \alpha^0$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha^0$ sogar für $p \in \bar{U}'$.

Nach Bemerkung 2 gibt es in P offene Mengen S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, mit $\Sigma\, \Sigma\, S_i^k = U'$ und den Eigenschaften: für $i_1 \neq i_2$ sind $\bar{S}_{i_1}^k$ und $\bar{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd, der Durchmesser von S_i^k ist $< \alpha^0$. Wir bezeichnen die leere Menge mit S_1^{-1} und mit j eine der Zahlen $-1, 0, 1, \ldots, n-1$.

Wir machen die Annahme, es seien U^j eine in P offene Menge mit $U^j + \Sigma\, S_j^{j+1} + \ldots + \Sigma\, S_i^n = U'$ und $(g^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ eine endliche Abbildungsschar in P mit den Eigenschaften I^j bis IV^j.

I^j. In allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = -2$ oder $p \in P - U'$ und $-2 \leqq \tau \leqq j$, ist $g^\tau(p) = g(p)$.

II^j. Für $-2 \leqq \tau \leqq j$ ist $\varrho(g, g^\tau) < \alpha^j$.

III^j. Es existiert eine positive Zahl ε^j derart, daß $p \neq g^j(p) = h(p)$ in allen Punkten p aus P, deren Entfernung von $(\bar{U}' - U') + (\bar{U}^j - U^j)$ kleiner als ε^j ist.

IV^j. Für $p \in \bar{U}^j$ ist $g^j(p) = h(p)$.

Dann wollen wir nachweisen: es gibt eine in P offene Menge U^{j+1} mit $U^{j+1} + \Sigma\, S_i^{j+2} + \ldots + \Sigma\, S_i^n = U'$ und eine Fortsetzung von $(g^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ über $(j, j+1]$, so daß $(g^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j+1)$ eine endliche Abbildungsschar in P mit den Eigenschaften I^{j+1} bis IV^{j+1} ist.

Wir bezeichnen mit δ eine positive Zahl, von der gilt: für $i_1 \neq i_2$ sind die Mengen $S_{i_1}^{j+1}$ und $S_{i_2}^{j+1}$ um mehr als $2\,\delta$ voneinander entfernt. Es bedeute l eine der Zahlen $1, \ldots, m^{j+1}$. Statt S_l^{j+1} schreiben wir auch S, statt $S - \bar{U}^j$ auch T. Wir bezeichnen die Menge

$$(\bar{T} - T) \,.\, ((\bar{U}' - U') + (\bar{U}^j - U^j))$$

mit M.

Dann existieren, wie wir im nächsten Absatz zeigen, in P offene Mengen $W = W_i^{j+1}$ und Z mit den Eigenschaften:

$$\overline{W} + g(\overline{W}) + g^j(\overline{W}) + h(\overline{W}) \subset Z, \tag{22}$$

$$\overline{T} - M \subset W \subset U' - \overline{U}_j, \ \overline{W} - W \subset (U' - \overline{U}^j) + M, \tag{23}$$

es liegt W in der δ-Umgebung von S, der Durchmesser von Z ist $< \alpha^{j+1}$, man kann Z topologisch auf den R^r abbilden.

Da $\varrho(p, g(p)) < \alpha^0$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha^0$ für $p \in \overline{U}'$, ist der Durchmesser von $T + g(T) + h(T)$ kleiner als $3\,\alpha^0$, wegen $\alpha^0 < \alpha^j$ und II^j daher der Durchmesser von $T + g(T) + g^j(T) + h(T)$ kleiner als $5\,\alpha^j$. Wegen der Bedeutung der Zahlen α^i existiert also eine in P offene zum R^r homöomorphe Menge Z mit

$$\overline{T} + g(\overline{T}) + g^j(\overline{T}) + h(\overline{T}) \subset Z \tag{24}$$

und einem Durchmesser $< \alpha^{j+1}$. Dann sei B die Begrenzung der offenen Menge $U' - \overline{U}^j$. Da $\overline{T} - M$ in $U' - \overline{U}^j$ liegt, ist für jeden Punkt p aus $\overline{T} - M$ die Zahl $\varrho(p, B)/2 = \delta_p$ positiv. Für jedes p aus $\overline{T} - M$ bedeute U_p die Menge aller Punkte p' aus $U' - \overline{U}^j$ mit $\varrho(p, p') < \min(\delta/2, \delta_p, \delta_0)$, wobei δ_0 eine Zahl folgender Art: ist T_0 eine in der δ_0-Umgebung von T liegende Teilmenge von P, so bleibt (24) bei Ersetzung von T durch T_0 richtig. Wenn hierauf W die Menge $\Sigma\, U_p$, $p \in \overline{T} - M$, ist, gilt, wie man leicht bestätigt, (22) und (23).

Nach Satz 1 gibt es in P offene Mengen $V - V_l^{j+1}$ und Y mit

$$T \subset V, \ \overline{V} - M \subset W, \ \overline{V} - V \subset Y \tag{25}$$

sowie eine Schar $(g_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g_0^τ von $\overline{W}$ in Z mit den Eigenschaften: in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{W}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{W} - W$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist $g_0^\tau(p) = g^j(p)$; die Abbildungsschar $(g_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ ist endlich;

$$g_0^1(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{V}; \tag{26}$$

$$p + g_0^1(p) = h(p) \text{ für } p \in \overline{Y} \,.\, \overline{W}. \tag{27}$$

Da die Mengen $\overline{W}_i^{j+1}$, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, paarweis zueinander fremd sind, können wir $g_0^\tau(p)$ für in allen (p, τ) mit $p \in \Sigma\, \overline{W}_i^{j+1}$ und $0 < \tau \leqq 1$ erklärt nehmen; in den letzteren (p, τ) sei $g^{j+\tau}(p) = g_0^\tau(p)$. Es sei $g^{j+\tau}(p) = g^j(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P - \Sigma\, W_i^{j+1}$ und $0 < \tau \leqq 1$.

Dann ist $(g^\tau,\ -2 \leqq \tau \leqq j+1)$ eine endliche Abbildungsschar in P, über die I^{j+1} gilt. Es ist II^{j+1} richtig, da Z einen Durchmesser $< \alpha^{j+1}$ hat und $g(\overline{W}) + g^\tau(\overline{W})$ für $j \leqq \tau \leqq j+1$ in Z liegt.

Bestimmen wir die in III^{j+1} und IV^{j+1} in Rede stehende Menge U^{j+1} durch

$$U^{j+1} = U^j + \Sigma V_i^{j+1} + \Sigma S_i^{j+1} \tag{28}$$

so ist U^{j+1} eine in P offene Teilmenge von U' und

$$\overline{U}^{j+1} - U^{j+1} \subset (\overline{U}^j - U^j) + \Sigma (\overline{V}_i^{j+1} - V_i^{j+1}). \tag{29}$$

Zum Beweis von (29) genügt es zu zeigen, daß $\overline{S} - S$ in $\overline{U}^j + V$ liegt: Es ist $(\overline{S} - S) - \overline{U}^j \subset \overline{S - \overline{U}^j} = \overline{T} \subset \overline{V}$.

Mit III^{j+1} ist die Aussage gleichwertig: zu jedem Punkt q aus $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^{j+1} - U^{j+1})$ existiert eine in P offene Menge $X \in q$ derart, daß $p \neq g^{j+1}(p) = h(p)$ für $p \in \overline{X}$. — Wenn *erstens* q zu $\overline{W}$ fremd, so liegt q wegen $\overline{V} \subset \overline{W}$ und (7) auf $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)$. Daher ist hier die Behauptung nach III^j richtig. Es sei *zweitens* $q \in (\overline{W} - W).(\overline{U}' - U')$. Dann ist $q \in M$ nach (23), wegen $M \subset \overline{T} \subset \overline{V}$ und $q \in V$ also $q \in \overline{V} - V \subset Y$, daher die Behauptung ebenfalls richtig. Ist *drittens* q ein Punkt aus der Menge $(\overline{W} - W) \,.\, (\overline{U}^{j+1} - U^{j+1})$, so ist q nach (29) in $(\overline{W} - W).(\overline{U}^j - U^j) + (\overline{V} - V)$ gelegen. Nach (23) ist $(\overline{W} - W) \,.\, (\overline{U}^j - U^j)$ Teilmenge von M, also $q \in M + (\overline{V} - V)$, wegen $M \subset \overline{V}$ und $q \in V$ daher $q \in \overline{V} - V \subset Y$ wie im zweiten Fall. *Viertens* sei $q \in W$. Wegen $W \subset U'$ ist $q \in U^{j+1} - U^{j+1}$, daher $q \in (\overline{U}^j - U^j) + (\overline{V} - V)$ nach (29). Nun ist $W.\overline{U}^j = 0$, also $q \in \overline{V} - V \subset Y$ wie im dritten Fall.

Zu IV^{j+1}. Wegen $\Sigma \overline{S}_i^{j+1} \subset \overline{U}^j + \Sigma \overline{V}_i^{j+1}$ ist $\overline{U}^{j+1} \subset \overline{U}^j + \Sigma \overline{V}_i^{j+1}$, daher IV^{j+1} wegen $U^j \,.\, W = 0$ und $V \subset W$ sowie IV^j und (26) richtig.

Für $j = -1$ und $g^\tau = g$, $-2 \leqq \tau \leqq -1$, ist die obige Annahme richtig. Daher gilt I^τ bis IV^τ. Setzen wir noch $f^\tau = g^{(n+2)\tau - 2}$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$, so stellt $(f^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Abbildungsschar der verlangten Art dar.

Satz 6. *Sind $(\alpha^0, \ldots, \alpha^n)$ eine n-fache Überdeckungsreihe von P und g, h stetige Abbildungen von P in sich mit $\varrho(g, h) < \alpha^0$, so gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $\varrho(f^\tau, g) < \alpha^\nu$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, sowie $f^0 = g$ und $f^1 = h$.*

Beweis. Wie leicht aus Bemerkung 2 folgt, existieren in P offene Mengen S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, mit $\Sigma \Sigma S_i^k = P$ und den Eigenschaften: für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{S}_{i_1}^k$ und $\overline{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd, für alle (i, k) hat $g(S_i^k) + h(S_i^k)$ einen Durchmesser $< \alpha^0$. Wir bezeichnen die leere Menge mit S_1^{-1} und mit j eine der Zahlen $-1, 0, 1, \ldots, n-1$.

Weiter machen wir die Annahme, es sei eine Schar $(g^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich erklärt mit $g^{-2} = g$ und den Eigenschatfen I^j und II^j.

I^j. Für $-2 \leqq \tau \leqq j$ ist $\varrho(g, g^\tau) < \alpha^j$.

II^j. Für $p \in \Sigma \overline{S}^{-1} + \ldots + \Sigma \overline{S}_i^j$ ist $g^j(p) = h(p)$.

Dann wollen wir nachweisen, daß sich $(g^\tau, -2 \leqq \tau \leqq j)$ mit den Eigenschaften I^{j+1} und II^{j+1} über $(j, j+1]$ fortsetzen läßt.

Für alle (i, k) hat die Menge $g(S_i^k) + g^j(S_i^k) + h(S_i^k)$ einen Durchmesser $< 3\alpha^j$. Denn der Durchmesser von $g(S_i^k) + h(S_i^k)$ ist $< \alpha^0$, und wegen I^j ist $\varrho(g, g^j) < \alpha^j$, wegen $\alpha^0 < \alpha^j$ daher die Behauptung richtig.

Die Mengen $\overline{S}_i^{j+1}$, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, sind kompakt und paarweis zueinander fremd. Daher existiert eine positive Zahl δ derart, daß der Abstand von je zwei verschiedenen dieser Mengen $> 2\delta$ ist. Es bedeute l eine der Zahlen $1, \ldots, m^{j+1}$. Statt S_l^{j+1} schreiben wir auch S. Da $g(S) + g^j(S) + h(S)$ einen Durchmesser $< 3\alpha^j$ hat, gibt es eine in P offene zum R^r homöomorphe Menge Z mit

$$g(\overline{S}) + g^j(\overline{S}) + h(\overline{S}) \subset Z \tag{30}$$

und einem Durchmesser $< \alpha^{j+1}$. Weiter existiert, da Z zum R^r homöomorph, eine für alle (p, p', τ), wobei p und p' Punkte aus Z und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, erklärte stetige Abbildung f in Z, über die gilt: in allen (p, p') ist $f(p, p', 0) = p$ und $f(p, p', 1) = p'$; wenn $p = p'$, ist $f(p, p', \tau) = p$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Es bedeute $U = U_l^{j+1}$ eine in P offene Menge, die $\bar{S}$ enthält, in der δ-Umgebung von S liegt und von der

$$g(\overline{U}) + g^j(\overline{U}) + h(\overline{U}) \subset Z \tag{31}$$

gilt. Ferner bezeichne λ eine stetige Abbildung von $\bar{U}$ in $[0, 1]$ derart, daß $\lambda(p) = 0$ für $p \in \overline{U} - U$ und $\lambda(p) = 1$ für $p \in \overline{S}$ ist.

In allen (p, τ) mit $p \in \Sigma \overline{U}_i^{j+1}$ und $0 < \tau \leqq 1$ sei hierauf

$$g^{j+\tau}(p) = f(g^j(p),\ h(p),\ \tau\,\lambda(p)). \tag{32}$$

Es sei $g^{j+\tau}(p) = g^j(p)$ in den (p, τ) mit $p \in P - \Sigma U_i^{j+1}$ und $0 < \tau \leqq 1$. Da die $\overline{U}_i^{j+1}$, $i = 1, \ldots, m^{j+1}$, paarweis zueinander fremd und $\lambda(p) = 0$ für $p \in \overline{U} - U$, ist jede der Abbildungen g^τ, $j < \tau \leqq j+1$, stetig. Es ist sogar $(g^\tau, j \leqq \tau \leqq j+1)$ eine Abbildungsschar.

Für alle (p, τ) mit $p \in \overline{U}$ und $j \leqq \tau \leqq j+1$ liegen die Punkte $g(p)$ und $g^{j+\tau}(p)$ in Z, überdies hat Z einen Durchmesser $< \alpha^{j+1}$. Daher ist I^{j+1} richtig.

Zum Beweis von II^{j+1} sei *erstens* q ein in $(\Sigma \overline{S}_i^{-1} + \ldots + \Sigma \overline{S}_i^j) - U$ gelegener Punkt. Dann ist $g^j(q) = h(q)$ nach II^j und wegen $q \in U$ weiter $g^{j+1}(q) = g^j(q)$. Wenn *zweitens* q in $(\Sigma \overline{S}_i^{-1} + \ldots + \Sigma \overline{S}_i^j) \cdot \overline{U}$

liegt, so ist $g^j(q) = h(q)$ nach II^j und $f(g^j(q), h(q), \tau) = h(q)$ für $0 \leqq \tau \leqq 1$ nach der Erklärung von f, also $g^{j+1}(q) = h(q)$ nach (32). Liegt *drittens* q in $\overline{S}$, so ist $\lambda(q) = 1$, daher $g^{j+1}(q) = h(q)$ nach (32).

Wenn $j = -1$ und $g^\tau = f$ für $-2 \leqq \tau \leqq -1$, sind I^j und II^j richtig. Es gibt also eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und den weiteren Eigenschaften: für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $\varrho(f, f^\tau) < \alpha^n$, für $p \in \Sigma\Sigma S_i^k = P$ ist $f^1(p) = h(p)$. Und damit ist Satz 6 bewiesen.

Satz 7. *Sind* $(\alpha^0, \ldots, \alpha^{2n})$ *eine* $2n$*-fache Überdeckungsreihe von* P *und* g, h *stetige Abbildungen von* P *in sich mit* $\varrho(g, h) < \alpha^0$ *und höchstens endlich vielen Fixpunkten, so gibt es eine endliche Abbildungsschar* $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *in* P *mit* $\varrho(f^\tau, g) < 2\alpha^{2n}$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, *sowie* $f^0 = g$ *und* $f^1 = h$.

Beweis. Nach Satz 6 gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $\varrho(g, g^\tau) < \alpha^n$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und $g^0 = g$, $g^1 = h$.

Es bezeichne A die Menge aller Punkte p aus P, in denen $p = g^\tau(p)$ für wenigstens eine Zahl τ aus $[0, 1]$ richtig ist. Die Menge A ist kompakt; da weiter für $p \in A$ die Menge $\overline{p} + \Sigma\overline{g^\tau(p)}$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, einen Durchmesser $< \alpha^n$ hat, gibt es eine positive Zahl δ derart, daß sogar für alle Punkte p aus P mit $\varrho(p, A) \leqq \delta$ die Menge

$$\overline{p} + \Sigma\overline{g^\tau(p)},\ 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

einen Durchmesser $< \alpha^n$ hat. Es bedeute U die Menge aller Punkte p aus P mit $\varrho(p, A) < \delta$. Ferner sei λ eine stetige Abbildung von P in $[0, 1]$ mit $\lambda(p) = 0$, $p \in A$, und $\lambda(p) = 1$ für $p \in P - U$. Ist hierauf $h^\tau(p) = g^{\tau\lambda(p)}(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$, so sind für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Menge der Fixpunkte von g und die von h^τ gleich. Daher ist $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine endliche Abbildungsschar. Es gilt $p + h^1(p) = h(p)$ für $p \in P - U$, in den Punkten p aus $\overline{U}$ ist $\varrho(p), h^1(p)) < \alpha''$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha^n$.

Nach Satz 5 läßt sich weiter $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ derart über $(1, 2]$ fortsetzen, daß $\varrho(h^1, h^\tau) < \alpha^{2n}$ für $1 < \tau \leqq 2$ und weiter gilt: die Abbildungsschar $(h^\tau, 1 \leqq \tau \leqq 2)$ ist endlich, $h^2 = h$.

Mit $f^\tau = h^{2\tau}$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, ist dann $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine endliche Abbildungsschar in P von der in Satz 7 verlangten Art.

Satz 8, *Satz über endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten. Sind* $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ *eine Schar stetiger*

Abbildungen f^τ von P in sich und ε eine positive Zahl, so gibt es eine endliche Abbildungsschar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ in P mit $\varrho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und der Eigenschaft: wenn f^0 und ebenso f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so ist $f^0 = g^0$ und $f^1 = g^1$.

Beweis. Es seien $(\alpha^0, \ldots, \alpha^{2n})$ eine $2n$-fache Überdeckungsreihe von P mit $\alpha^{2n} < \varepsilon/3$; ferner $\zeta_0, \ldots, \zeta_m$ Zahlen mit $0 = \zeta_0 < \ldots < \zeta_m = 1$ und der Eigenschaft, daß

$$\varrho(f^{\zeta_i}, f^\tau) < \alpha^0/2$$

in allen (i, τ) mit $i = 0, \ldots, m-1$ und $\zeta_i \leqq \tau \leqq \zeta_{i+1}$. Für $i = 0, \ldots, m$ bedeute g^{ζ_i} eine stetige Abbildung von P in sich mit $\varrho(f^{\zeta_i}, g^{\zeta_i}) < \alpha^0/4$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten; überdies sei, wenn f^0 und ebenso f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat, $f^0 = g^0$ und $f^1 = g^1$. Dann ist $\varrho(g^{\zeta_i}, g^{\zeta_{i+1}}) < \alpha^0$ für $i = 0, \ldots, m-1$.

Nach Satz 7 existiert daher eine endliche Abbildungsschar $(h^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ in P mit den Eigenschaften: für $i = 0, \ldots, m$ ist $g^{\zeta_i} = h^{\zeta_i}$; es ist $\varrho(g^{\zeta_i}, h^\tau) < 2\,\alpha^{2n}$ für $\zeta_i \leqq \tau \leqq \zeta_{i+1}$ und $i = 0, \ldots, m-1$.

Dann ist, wenn i eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$ und τ eine Zahl aus $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$ bedeutet, $\varrho(f^\tau, h^\tau) \leqq \varrho(f^\tau, f^{\zeta_i}) + \varrho(f^{\zeta_i}, g^{\zeta_i}) + \varrho(g^{\zeta_i}, h^\tau) < \alpha^0/2 + \alpha^0/4 + 2\alpha^{2n} < 3\,\alpha^{2n} < \varepsilon$.

Mithin kann man $g^\tau = h^\tau$ in den von $\zeta_0, \ldots, \zeta_m$ verschiedenen Zahlen τ aus $[0, 1]$ setzen, womit Satz 8 bewiesen.

Satz 9. *Sind f, f' homotope Abbildungen von P in sich, so existiert eine Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $f^1 = f'$ und der Eigenschaft, daß für $0 < \tau < 1$ die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat.*

Beweis. Zunächst existiert, wie aus den voraufgehenden Sätzen leicht folgt, eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $g^0 = f$, $g^1 = f'$ und den Eigenschaften: es gibt eine gegen 0 konvergierende Folge von Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus $(0, \frac{1}{2})$ und eine gegen 1 konvergierende Folge von Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ aus $(\frac{1}{2}, 1)$ derart, daß für jede natürliche Zahl i die Abbildung g^{α_i} und ebenso die Abbildung g^{β_i} höchstens endlich viele Fixpunkte hat. Alsdann führt eine Anwendung von Satz 8 den Beweis zu Ende.

Hier schließen unsere Untersuchungen. Die folgenden Bemerkungen, Verschärfungen der oben hergeleiteten Sätze betreffend, bleiben unbewiesen. — Zunächst läßt sich, wie dies in der eingangs zitierten Arbeit von *G. Hirsch* bereits für eine Abbildung durchgeführt ist, die Voraussetzung, es sei die topologische Mannigfaltigkeit P kompakt,

entbehren und so folgender Satz beweisen: Zu der Schar $(f^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ der topologischen Mannigfaltigkeit P in sich und der positiven Zahl ε gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $\varrho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, und der Eigenschaft, daß für $0 \leqq \tau \leqq 1$ die Abbildung g^τ in jeder kompakten Teilmenge von P höchstens endlich viele Fixpunkte hat. — *Es seien zwei topologische Mannigfaltigkeiten P, Q gleicher Dimension, zwei Scharen $(f_1^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $(f_2^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen f_1^τ, f_2^τ von P in Q und eine positive Zahl ε gegeben. Bezeichnet man dann jeden Punkt p aus P mit $f_1^\tau(p) = f_2^\tau(p)$ als eine „Koinzidenz" des Abbildungspaares (f_1^τ, f_2^τ), so existieren Scharen $(g_1^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$, $(g_2^\tau, 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen g_1^τ, g_2^τ von P in Q, über die gilt: für $0 \leqq \tau \leqq 1$ und $i = 1, 2$ ist die Abbildung g_i^τ zu f_i^τ homotop und $\varrho(f_i^\tau, g_i^\tau) < \varepsilon$; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ hat das Abbildungspaar (g_1^τ, g_2^τ) in jeder kompakten Teilmenge von P höchstens endlich viele Koinzidenzen; wenn (f_1^0, f_2^0) und ebenso (f_1^1, f_2^1) höchstens endlich viele Koinzidenzen hat, so ist $g_i^0 = f_i^0$ und $g_i^1 = f_i^1$ für $i = 1, 2$.*

Zur Theorie der Hermiteschen Kreise*.

Von

M. Pinl und **K. Schuff**, Köln.

(Eingelangt am 10. September 1954.)

Bei früherer Gelegenheit wurde gezeigt[1], wie der Hermitesche Raum der Maßbestimmung

$$\underset{\sim}{x}\,\bar{\underset{\sim}{x}} = x_1\,\bar{x}_1 + x_2\,\bar{x}_2 + \ldots + x_n\,\bar{x}_n = \bar{\underset{\sim}{x}}\,\underset{\sim}{x};$$

(x_k und x_k konjugiert-komplex) durch Erweiterung auf Punkte mit hyperkomplexen Koordinaten für die Einführung isotroper Vektoren ($\underset{\sim}{x}\bar{\underset{\sim}{x}} = 0, \underset{\sim}{x} \neq 0$) wieder zugänglich gemacht werden kann. Auf die gleiche Weise können nunmehr den Hermiteschen Kreisen

$$x\,\bar{x} + y\,y = r\,r$$

uneigentliche aber auch eigentliche Punkte zugeordnet werden, welche von den speziellen Werten des Kreisradius r unabhängig sind und in der hyperkomplex erweiterten Hermiteschen Ebene die gleiche Rolle spielen, wie die absoluten Kreispunkte in der komplex erweiterten euklidischen Ebene (§ 1.). Auch die singulären Kreise vom Radius Null in der komplexen euklidischen Ebene finden ihr Hermitesches Analogon und führen in einfachster Weise zu den isotropen Geraden in der hyperkomplex erweiterten Hermiteschen Ebene (§ 2).

§ 1. Reguläre Hermitesche Kreise.

Wir bezeichnen die Einheiten der beiden im Folgenden verwendeten viergliedrigen Systeme hyperkomplexer Zahlen mit e_0, e_1, e_2, e_3 und setzen

$$x = \xi_0\,e_0 + \xi_1\,e_1 + \xi_2\,e_2 + \xi_3\,e_3,\quad \bar{x} = \xi_0\,e_0 - \xi_1\,e_1 - \xi_2\,e_2 - \xi_3\,e_3 \qquad (1)$$

* Herrn *H. Hopf* zum 60. Geburtstag am 19. November 1954.

[1] Vgl. *M. Pinl*, Isotrope Vektoren im erweiterten Hermiteschen Raum, Commentarii mathematici Helvetici **26/4** (1952), 324—327.

mit reellen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Wir verwenden die beiden Multiplikationstabellen[2]

(I)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_3	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$

(II)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	e_2	0	0

und erhalten in beiden Fällen reelle kommutative Produkte $x\,\bar{x} = \bar{x}x$ und zwar:

$$x\,\bar{x} = e_0\,(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2) = \bar{x}\,x \qquad \text{im Falle (I)}, \tag{2}$$

$$x\,\bar{x} = e_0\,(\xi_0^2 + \xi_1^2) \qquad = \bar{x}\,x \qquad \text{im Falle (II)}. \tag{3}$$

Die hyperkomplexen Zahlen (1) reduzieren sich auf gewöhnliche (konjugiert)-komplexe Zahlen für $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $e_0 = 1$, $e_3 = i$ im Falle (I), und für $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $e_0 = 1$, $e_1 = i$ im Falle (II). In beiden hyperkomplexen Systemen gilt ferner für den Übergang zum konjugiert-hyperkomplexen Produkt $\overline{\alpha\,x}$ die Beziehung:

$$\overline{\alpha\,x} = \overline{x\,\alpha}, \tag{4}$$

wie im Falle der Hamiltonschen Quaternionen.

Denn im Falle (I) entsteht:

$$\begin{aligned}\alpha\,x &= (\alpha_0\,e_0 + \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2 + \alpha_3\,e_3)\,(\xi_0\,e_0 + \xi_1\,e_1 + \xi_2\,e_2 + \xi_3\,e_3) = \\ &= (\alpha_0\,\xi_0 + \alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 - \alpha_3\,\xi_3)\,e_0 + (\alpha_0\,\xi_1 + \alpha_1\,\xi_0 - \alpha_2\,\xi_3 + \alpha_3\,\xi_2)\,e_1 + \\ &+ (\alpha_2\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_2 + \alpha_1\,\xi_3 - \alpha_3\,\xi_1)\,e_2 + (\alpha_3\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_3 + \alpha_1\,\xi_2 - \alpha_2\,\xi_1)\,e_3\end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\,x} &= (\alpha_0\,\xi_0 + \alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 - \alpha_3\,\xi_3)\,e_0 - (\alpha_1\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_1 + \alpha_3\,\xi_2 - \alpha_2\,\xi_3)\,e_1 \\ &- (\alpha_2\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_2 + \alpha_1\,\xi_3 - \alpha_3\,\xi_1)\,e_2 - (\alpha_3\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_3 + \alpha_1\,\xi_2 - \alpha_2\,\xi_1)\,e_3.\end{aligned}$$

Denselben Wert erhält man aber auch für das Produkt:

$$\overline{x\,\alpha} = (\xi_0\,e_0 - \xi_1\,e_1 - \xi_2\,e_2 - \xi_3\,e_3)\,(\alpha_0\,e_0 - \alpha_1\,e_1 - \alpha_2\,e_2 - \alpha_3\,e_3).$$

Im Falle (II) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\alpha\,x &= (\alpha_0\,e_0 + \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2 + \alpha_3\,e_3)\,(\xi_0\,e_0 + \xi_1\,e_1 + \xi_2\,e_2 + \xi_3\,e_3) = \\ &= (\alpha_0\,\xi_0 - \alpha_1\,\xi_1)\,e_0 + (\alpha_1\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_1)\,e_1 + (\alpha_2\,\xi_0 + \alpha_3\,\xi_1 + \alpha_0\,\xi_2 - \\ &- \alpha_1\,\xi_3)\,e_2 + (\alpha_3\,\xi_0 - \alpha_2\,\xi_1 + \alpha_1\,\xi_2 + \alpha_0\,\xi_3)\,e_3\end{aligned}$$

und daher:

[2] Vgl. (1), S. 324 und 326.

$$\overline{\alpha\,x} = (\alpha_0\,\xi_0 - \alpha_1\,\xi_1)\,e_0 - (\alpha_1\,\xi_0 + \alpha_0\,\xi_1)\,e_1 - (\alpha_2\,\xi_0 + \alpha_3\,\xi_1 + \\ + \alpha_0\,\xi_2 - \alpha_1\,\xi_3)\,e_2 - (\alpha_3\,\xi_0 - \alpha_2\,\xi_1 + \alpha_1\,\xi_2 + \alpha_0\,\xi_3)\,e_3.$$

Denselben Wert erhält man auch hier für das Produkt

$$\overline{x\,\alpha} = (\xi_0\,e_0 - \xi_1\,e_1 - \xi_2\,e_2 - \xi_3\,e_3)\,(\alpha_0\,e_0 - \alpha_1\,e_1 - \alpha_2\,e_2 - \alpha_3\,e_3).$$

Die Gesamtheit aller hyperkomplexen Punkte, deren homogene hyperkomplexe Koordinaten

$$x_0 = \xi_0^{(0)}\,e_0 + \xi_1^{(0)}\,e_1 + \xi_2^{(0)}\,e_2 + \xi_3^{(0)}\,e_3,\quad \bar{x}_0 = \xi_0^{(0)}\,e_0 - \xi_1^{(0)}\,e_1 - \xi_2^{(0)}\,e_2 - \xi_3^{(0)}\,e_3$$
$$x_1 = \xi_0^{(1)}\,e_0 + \xi_1^{(1)}\,e_1 + \xi_2^{(1)}\,e_2 + \xi_3^{(1)}\,e_3,\quad \bar{x}_1 = \xi_0^{(1)}\,e_0 - \xi_1^{(1)}\,e_1 - \xi_2^{(6)}\,e_2 - \xi_3^{(1)}\,e_3$$
$$(\xi_k^l \text{ reell}),$$
$$x_2 = \xi_0^{(2)}\,e_0 + \xi_1^{(2)}\,e_1 + \xi_2^{(2)}\,e_2 + \xi_3^{(2)}\,e_3,\quad \bar{x}_2 = \xi_0^{(2)}\,e_0 - \xi_1^{(2)}\,e_1 - \xi_2^{(2)}\,e_2 - \xi_3^{(2)}\,e_3$$

die bilineare Bedingung

$$x_1\,\bar{x}_1 + x_2\,\bar{x}_2 = (r\,\bar{r})\,(x_0\,\bar{x}_0),\quad r\,\bar{r} \neq 0 \tag{5}$$

erfüllen, heißt ein *regulärer Hermitescher Kreis* um den Nullpunkt $x_1 = x_2 = 0$, $x_0 \neq 0$ der hyperkomplex (im Sinne von (I) oder (II)) erweiterten Hermiteschen Ebene.

Für $x_0\,\bar{x}_0 = x_1\,\bar{x}_1 + x_2\,\bar{x}_2 = 0$ ist (5) erfüllt mit jedem Wert von r. Alle derartigen Punkte nennen wir die *absoluten Punkte* des regulären Hermiteschen Kreises (5). Nach (2) ist $x_0\,\bar{x}_0 = 0$, wenn

$$\xi_0^{(0)2} - \xi_1^{(0)2} - \xi_2^{(0)2} + \xi_3^{(0)2} = 0$$

im Falle (I) und wenn

$$\xi_0^{(0)2} + \xi_1^{(0)2} = 0$$

im Falle (II). In beiden Fällen ist dafür hinreichend aber nicht notwendig: $\xi_0^{(0)} = \xi_1^{(0)} = \xi_2^{(0)} = \xi_3^{(0)} = 0$. Das bedeutet: die *absoluten Punkte der regulären Hermiteschen Kreise zerfallen in eigentliche oder uneigentliche absolute Punkte, je nachdem ob die hyperkomplexen Koordinaten x_0, $\bar{x}_0$ Nullteiler sind oder verschwinden.*

§ 2. Singuläre Hermitesche Kreise und isotrope Geraden.

Für $x_0\,\bar{x}_0 \neq 0$ schreiben wir die Hermiteschen Kreise (5) mit Verwendung inhomogener Koordinaten x und y in der Form

$$x\,\bar{x} + y\,\bar{y} = r\,\bar{r},\ (y = \eta_0\,e_0 + \eta_1\,e_1 + \eta_2\,e_2 + \eta_3\,e_3). \tag{6}$$

Da wir den allgemeinen Fall eines hyperkomplexen Radius r zulassen, sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) $r\bar{r} \neq 0$, b) $r\bar{r} = 0$, $r = 0$, c) $r\bar{r} = 0$, $r \neq 0$.

Die zu b) und c) gehörigen Hermiteschen Kreise nennen wir *singuläre Hermitesche Kreise*. Dann gilt: *die singulären Hermiteschen Kreise*

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0 \tag{7}$$

zerfallen in zwei Klassen, je nachdem ob der hyperkomplexe Radius r verschwindet oder Nullteiler im hyperkomplexen System (I) *oder* (II) *ist.*

Wir betrachten jetzt die vier hyperkomplexen Geraden durch den Nullpunkt:

$$\alpha x + \beta y = 0,\ \alpha x + y\beta = 0,\ x\alpha + \beta y = 0,\ x\alpha + y\beta = 0, \tag{8}$$

die im allgemeinen nicht zusammenfallen, Die Geraden (8) und die singulären Kreise (7) haben sicher den Nullpunkt gemeinsam. Unter welchen Bedingungen liegen alle Punkte dieser Geraden auf dem singulären Kreis (7)? Wir untersuchen zunächst das System

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0,\ \alpha x + \beta y = 0. \tag{9}$$

Durch Multiplikation mit β und $\bar{\beta}$ bekommen wir aus (9):

$$\beta x \bar{x} \beta + \beta y \bar{y} \beta = 0,\ \beta x \bar{x} \bar{\beta} + \alpha x \bar{x} \bar{\alpha} - \beta \beta x x + \alpha \alpha x \bar{x} = 0.$$

Die letzte dieser Relationen besteht identisch in x, also auch für $x\bar{x} \neq 0$. Daher gilt notwendig:

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 0. \tag{10}$$

Jetzt betrachten wir das System:

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0,\ \alpha x + y\beta = 0 \quad \text{oder:} \quad \bar{x}x + \bar{y}y = 0,\ \bar{x}\bar{\alpha} + \bar{\beta}\bar{y} = 0.$$

In diesem Falle gilt

$$\beta\bar{x}x\beta + \bar{\beta}\bar{y}y\beta = 0,\ \beta\bar{x}x\beta - x\alpha(-\alpha x) - \beta\beta\bar{x}x + \alpha\alpha xx - 0\{x\}:$$

dies führt wiederum notwendig zu (10). Dasselbe gilt für das System

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0,\ x\alpha + \beta y = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{x}x + yy = 0,\ \bar{\alpha}\bar{x} + y\beta = 0.$$

Denn

$$\beta x \bar{x} \bar{\beta} + \beta y \bar{y} \bar{\beta} = \beta x \bar{x} \bar{\beta} + x\alpha\bar{\alpha}\bar{x} = \alpha\bar{\alpha} x\bar{x} + \beta\bar{\beta} x\bar{x} = 0\ \{x\}.$$

Schließlich folgt auch für das System

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0,\ x\alpha + y\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{x}x + \bar{y}y = 0,\ \bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y} = 0$$

unmittelbar:

$$\bar{\beta}\bar{x}x\beta + \bar{\beta}\bar{y}y\beta = \bar{\beta}\bar{x}x\beta + \bar{\alpha}\bar{x}x\alpha = \alpha\bar{\alpha}x\bar{x} + \beta\bar{\beta}x\bar{x} = 0\ \{x\}$$

und damit wiederum (10). Die Bedingung (10) bedeutet:

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0 \text{ im System (I)} \quad (11)$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 = 0, \ \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3 \text{ beliebig im System (II).} \quad (12)$$

Da α_0, α_1, α_2, α_3, ... β_3 reelle Zahlen sind, ist (12) gleichbedeutend mit $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0$.

Durch (11) ist eine, durch (12) sind vier Bedingungen für je acht homogene Parameter gegeben. Daher gilt: *die isotropen Geraden durch den Nullpunkt der nach (I) hyperkomplex erweiterten Hermiteschen Ebene hängen von sechs reellen Parametern ab, diejenigen durch den Nullpunkt der nach (II) hyperkomplex erweiterten Hermiteschen Ebene hängen von drei reellen Parametern ab.*

Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer analytischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

Von

Georg Kantz, Graz.

(Eingelangt am 13. September 1954.)

§ 1. Problemstellung.

Die analytische Funktion $w = f(z)$ vermittle eine konforme Abbildung eines Gebietes $\mathfrak{G}$ der z-Ebene auf ein Gebiet $\mathfrak{G}^*$ der w-Ebene. Die zu $w = f(z)$ gehörige Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ ist in $\mathfrak{G}^*$ regulär analytisch. Es seien mit Weglassung der entsprechenden Argumente die sukzessiven Ableitungen von f nach z bzw. φ nach w mit $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ bzw. mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ bezeichnet.

Zunächst gilt

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1}, \tag{1}$$

wobei die entsprechenden Argumente w und z durch die Beziehung $w = f(z)$ aneinander gekoppelt sind. Beiderseitiges Differenzieren von (1) nach w ergibt unter Beachtung von (1)

$$\varphi_2 = -\frac{f_2}{f_1^3}. \tag{2}$$

Fortgesetztes Differenzieren nach w liefert nach entsprechenden Reduzierungen und Kürzungen

$$\varphi_3 = -\frac{f_3}{f_1^4} + \frac{3 f_2^2}{f_1^5} \tag{2$_1$}$$

$$\varphi_4 = -\frac{f_4}{f_1^5} + \frac{10 f_3 f_2}{f_1^6} - \frac{15 f_2^3}{f_1^7} \tag{2$_2$}$$

$$\varphi_5 = -\frac{f_5}{f_1^6} + \frac{15 f_4 f_2 + 10 f_3^2}{f_1^7} - \frac{105 f_3 f_2^2}{f_1^8} + \frac{105 f_2^4}{f_1^9} \tag{2$_3$}$$

. . . . . .

Allgemein gilt für φ_n:

$$\varphi_n = -\frac{f_n}{f_1^{n+1}} + \frac{Z_{2,n}}{f_1^{n+2}} - \ldots (-1)^r \frac{Z_{r,n}}{f_1^{n+r}} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{Z_{n-1,n}}{f^{2n-1}}, \quad (3)$$

wobei $Z_{r,n}$ eine Form r-ten in den f_i mit $2 \leqq i \leqq n$ bedeutet. Jedes Glied von $Z_{r,n}$ hat die Gestalt

$$C f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} \qquad (2 \leqq a_j \leqq n, j = 1, 2, \ldots k),$$

denselben Grad

$$r = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \quad (4)$$

und dieselbe Zeigersumme (Gewicht)

$$S = n + r - 1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \quad (5)$$

Setzt man $Z_{0,1} = 1, Z_{1,n} = f_n$ und $Z_{r,n} = 0$ für $r = 0$, $n \neq 1$ und $r \geqq n$, so kann (3) kürzer geschrieben werden:

$$\varphi_n = \sum_{r \geqq 0} (-1)^r \frac{Z_{r,n}}{f_1^{n+r}}, \quad (3_1)$$

und ist so für alle natürlichen $n \geqq 1$ gültig.

Die Koeffizienten der in den $Z_{r,n}$ auftretenden Glieder sind durch die Potenzprodukte

$$f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-(s+1)} \text{ bzw. } f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k}$$

charakterisiert und sollen daher mit

$$\mathfrak{K}(f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-(s+1)}) \text{ bzw. } K(f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k})$$

bezeichnet werden.

In dieser Mitteilung wird für diese Koeffizienten zunächst eine Rekursionsformel (§ 2) und dann eine direkte Darstellung (§ 3) gegeben.

§ 2. Die Rekursionsformel.

Beachtet man, wie ein solcher Koeffizient aus φ_n zustandekommt (nämlich durch Reduzierung gewisser Differentiationsergebnisse aus der Entwicklung von φ_{n-1}, nachdem man $\frac{dz}{dw}$ durch $\frac{1}{f_1}$ ersetzt hat), so ist leicht einzusehen, daß für die Koeffizienten folgende Rekursionsformel gilt:

$$\mathfrak{K}(f_{a_1}^{\alpha_1} \ldots f_{a_i}^{\alpha_i} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-(s+1)}) = l_1 \mathfrak{K}(f_{a_1}^{\alpha_1 - 1} f_{a_1} \ldots f_{a_i}^{\alpha_i} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-s}) + \ldots$$
$$+ l_i \mathfrak{K}(f_{a_1}^{\alpha_1} \ldots f_{a_i}^{\alpha_i - 1} f_{a_i} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-s}) + \ldots + l_k \mathfrak{K}(f_{a_1}^{\alpha_1} \ldots f_{a_i}^{\alpha_i} \ldots f_{a_k}^{\alpha_k - 1} f_{a_k} f_1^{-s})$$

oder kürzer

$$\Re(\prod_{i=1}^{k} f_{a_i}^{\alpha} \cdot f_1^{-(s+1)}) = \sum_{i=1}^{k} l_i \Re_i, \text{ wobei } \Re_i = \Re(f_{a_1}^{\alpha_1} \dots f_{a_i}^{\alpha_i - 1} f_{a_i - 1} \dots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-s}) \quad (I)$$

und $a_1 > a_2 \dots > a_i > a_{i+1} \dots > a_k \geqq 2$[1] gesetzt werden soll und l_i der Exponent von $f_{a_i - 1}$ in $f_{a_1}^{\alpha_1} \dots f_{a_i}^{\alpha_i - 1} f_{a_i - 1} \dots f_{a_k}^{\alpha_k} f_1^{-s}$ ist, wenn man alle $f_{a_i - 1}$ zu einer Potenzgröße zusammengezogen hat. Demnach ist

a) $l_i = 1$, wenn $a_i - 1 > a_{i+1}$, b) $l_i = a_{i+1} + 1$, wenn $a_i - 1 = a_{i+1}$ und

$$\text{c) } l_k = -s + 1, \text{ wenn } a_k = 2. \quad (6)$$

Beispiel:

$$\Re(f_3^2 f_2 f_1^{-9}) = 2\,\Re(f_3 f_2 f_2 f_1^{-8}) + 7\,\Re(f_3^2 f_1 f_1^{-8}) = 2\,K(f_3 f_2^2) + 7\,K(f_3^2) =$$
$$= 2(-105) + 7.10 = -280,$$

wobei die Werte von $K(f_3 f_2^2)$ und $K(f_3^2)$ aus der Formel (2_3) entnommen wurden.

§ 3. Direkte Darstellung der Koeffizienten.

Für den Koeffizienten $\Re$ bzw. K läßt sich eine explizite Formel angeben, zu der man mit Anwendung von kombinatorischen Überlegungen gelangen kann. Es gilt:

$$K(f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \dots f_{a_k}^{\alpha_k}) = (-1)^r \frac{s!}{a_1!^{\alpha_1} a_2!^{\alpha_2} \dots a_k!^{\alpha_k} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \quad (II)$$

worin r und s durch die rechten Seiten von (4) und (5) zu ersetzen sind.

Beweis der Formel (II): Da der nach Formel (II) sich für $K(f_2)$ ergebende Wert $(-1)^1 \frac{2!}{2!} = -1$ mit dem aus (2) abzulesenden Werte übereinstimmt, braucht man zum Beweise der Allgemeingültigkeit von (II) nur noch zu zeigen, daß die Rekursionsformel (I) zur Identität wird, wenn man in ihr für die K die ihnen nach Formel (II) entsprechenden rechtsseitigen Ausdrücke einsetzt. Für jeden der den drei Fällen in (6) entsprechenden Werte von l_i gilt:

$$l_i \Re_i = l_i . K(f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \dots f_{a_i}^{\alpha_i - 1} f_{a_i - 1} f_{a_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} \dots f_{a_k}^{\alpha_k}) = (-1)^r \frac{\alpha_i a_i (s-1)!}{a_1!^{\alpha_1} \dots a_k!^{\alpha_k} \alpha_1! \dots \alpha_k!} \quad (7)$$

[1] Diese Rangordnung der a_i ist für die Rekursionsformel unwesentlich, erleichtert aber die Aussage für die l_i in (6).

Zum Beweise von (7) wird jeder der drei unter (6) fallenden Fälle gesondert behandelt:

a) Hier ist $a_i - 1 > a_{i+1}$ und $l_i = 1$, somit

$$l_i \mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+(\alpha_i-1)+1+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_k} \cdot$$

$$\frac{[\alpha_1 a_1 + \ldots + (\alpha_i - 1)\, a_i + 1(a_i - 1) + \ldots \alpha_k a_k]!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots \dfrac{a_i!^{\alpha_i}}{a_i!} (a_i - 1)! \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \dfrac{\alpha_i!}{\alpha_i} \ldots \alpha_k!} = (-1)^r \frac{\alpha_i\, a_i (s-1)!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots a_k!^{\alpha_k} \alpha_1! \ldots \alpha_k!}$$

b) Hier ist $a_i - 1 = a_{i+1}$ und $l_i = \alpha_{i+1} + 1$, also

$$l_i \mathfrak{K}_i = (\alpha_{i+1} + 1)\, (-1)^{\alpha_1+\ldots+(\alpha_i-1)+(\alpha_{i+1}+1)+\ldots+\alpha_k} \cdot$$

$$\frac{[\alpha_1 a_1 + \ldots + (\alpha_i - 1) a_i + (\alpha_{i+1}+1) a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k]!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots \dfrac{a_i!^{\alpha_i}}{a_i!}\, a_{i+1}!^{\alpha_i} a_{i+1}! \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \dfrac{\alpha_i!}{\alpha_i}\, \alpha_{i+1}!\, (\alpha_{i+1}+1) \ldots \alpha_k!} =$$

$$= (-1)^r \frac{\alpha_i\, a_i (s-1)!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!} .$$

c) Hier ist $a_k = 2$ und $l_k = -s + 1$, also wegen $a_k! = a_k$ und $\alpha_1 a_1 + \ldots (\alpha_k - 1)\, 2 = s - 2$

$$l_k \mathfrak{K}_k = -(s-1)\, (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-1} \cdot \frac{[\alpha_1 a_1 \ldots + (\alpha_k - 1) a_k]!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots \dfrac{a_k!^{\alpha_k}}{a_k}\, \alpha_1! \ldots \dfrac{\alpha_k!}{\alpha_k}} =$$

$$= (-1)^r \frac{\alpha_k\, a_k\, (s-1)!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!}$$

womit (7) vollständig bewiesen ist.

Nun erhält man

$$\mathfrak{K}\Big(\prod_{i=1}^{k} f_{a_i}^{\alpha_i} \cdot f_1^{-(s+1)}\Big) = \sum_{i=1}^{k} l_i \mathfrak{K}_i = (-1)^r \frac{(s-1)!\, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i}{a_1!^{\alpha_1} \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!} =$$

$$= (-1)^r \frac{s!}{a_1!^{\alpha_1} a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!}$$

womit der Beweis von (II) erbracht ist.

§ 4. Die Taylorentwicklung der Umkehrfunktion.

Unter Berücksichtigung von (3_1) nimmt die Entwicklung von $\varphi(w)$ nach fortschreitenden Potenzen von $w - w_1$

$$z = \varphi(w) = z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-w_1)^n}{n!}\, \varphi_n(w_1)$$

die Gestalt an:

$$z = z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-w_1)^n}{n!} \left(\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{Z_{r,n}}{f_1^{n+r}} \right)_{z=z_1} \tag{8}$$

Zur Illustration der Formel (8) soll ein Beispiel behandelt werden: Sei $w = f(z) = e^z$ und $z_1 = 0$. Hier ist $w_1 = f(0) = 1$ und $f_i(0) = 1$ für jeden natürlichen Index i. Somit ist

$$\varphi_n(1) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \left(\frac{Z_{r,n}}{f_1^{n+r}} \right)_{z=0} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \, \mathfrak{Z}_{r,n}$$

wenn mit $\mathfrak{Z}_{r,n}$ die Koeffizientensumme der Form $Z_{r,n}$ bezeichnet wird. Wie anschließend bewiesen wird, ist

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \, \mathfrak{Z}_{r,n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \tag{9}$$

Als Taylorentwicklung der Umkehrfunktion $z = \operatorname{Log} w$ ergibt sich also gemäß (8)

$$z = \operatorname{Log} w = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-1)^n}{n!}\, (-1)^{n-1} (n-1)!$$

somit die bekannte Reihenentwicklung

$$\operatorname{Log} w = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(w-1)^n}{n} \tag{10}$$

Der Beweis der Formel (9), deren Gültigkeit für $n = 1, 2$ ersichtlich besteht, erfolgt durch vollständige Induktion unter der Induktionsannahme:

$$\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \, \mathfrak{Z}_{r,n-1} = \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r \, \mathfrak{Z}_{r,n-1} = (-1)^{n-2} (n-2)!\,; \; n>2 \tag{11}$$

Für $n \geqq 3$ gilt wegen (3_1) jedenfalls neben

$$\varphi_n = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{Z_{r,n}}{f_1^{n+r}} \tag{3_2}$$

auch

$$\varphi_{n-1} = \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r \frac{Z_{r,n-1}}{f_1^{n-1+r}} \tag{3_3}$$

Beiderseitige Differentiation von (3_3) nach w gibt:

$$\varphi_n = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{d\varphi_{n-1}}{dz} = \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r \left[\frac{Z'_{r,\,n-1}}{f_1^{n+r}} - (n-1+r) \frac{Z_{r,\,n-1} f_2}{f_1^{n+r+1}} \right] =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{Z'_{r,\,n-1} + (n+r-2) Z_{r-1,\,n-1} f_2}{f_1^{n+r}}$$

wenn man beachtet, daß $Z_{0,\,n-1} = 0$ und $Z'_{n-1,\,n-1} = 0$ (dies wegen $Z_{n-1,\,n-1} = 0$). Vergleich dieses letzten für φ_n erhaltenen Ausdruckes mit (3_2) liefert:

$$Z_{r,\,n} = Z'_{r,\,n-1} + (n+r-2) Z_{r-1,\,n-1} f_2; \; r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Daraus folgt bei Beachtung von

$$\mathfrak{Z}'_{r,\,n-1} = r\, \mathfrak{Z}_{r,\,n-1},$$

wenn $\mathfrak{Z}'_{r,\,n-1}$ die Koeffizientensumme von $Z'_{r,\,n-1}$ bedeutet,

$$\mathfrak{Z}_{r,\,n} = r\, \mathfrak{Z}_{r,\,n-1} + (n+r-2)\, \mathfrak{Z}_{r-1,\,n-1},$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \mathfrak{Z}_{r,\,n} = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r r\, \mathfrak{Z}_{r,\,n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r (n+r-2) \mathfrak{Z}_{r-1,\,n-1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r r\, \mathfrak{Z}_{r,\,n-1} + \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^{r-1} (n+r-1) \mathfrak{Z}_{r,\,n-1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-2} (r-n-r+1)\, (-1)^r \mathfrak{Z}_{r,\,n-1} = -(n-1) \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^r \mathfrak{Z}_{r,\,n-1},$$

und bei Berücksichtigung der Induktionsannahme (11) erhält man schließlich

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \mathfrak{Z}_{r,\,n} = -(n-1)(-1)^{n-2} (n-2)! = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{w.z.b.w.}$$

Bemerkung: Die Relation (3) geht natürlich in eine richtige über, wenn man die Symbole f und φ gegenseitig vertauscht. Setzt man, nachdem man diese Vertauschung durchgeführt hat, (für jedes natürliche i) $\varphi_i = (-1)^{i-1}(i-1)!$, so muß $f_n = 1$ gesetzt werden. Ein Glied der rechten Seite der so geänderten Relation (3)

$$(-1)^r \frac{(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k)!}{a_1!^{\alpha_1} a_2!^{\alpha_2} \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_k!} \; \varphi_{a_1}^{\alpha_1} \varphi_{a_2}^{\alpha_2} \ldots \varphi_{a_k}^{\alpha_k} \varphi_1^{-s+1}$$

erhält so mit Berücksichtigung von (4) und (5) den Wert:

$$(-1)^r \frac{s!}{a_1!^{\alpha_1} \ldots a_k!^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!} (-1)^{\alpha_1 (a_1-1)} (a_1-1)!^{\alpha_1} \ldots (-1)^{\alpha_k (a_k-1)} (a_k-1)!^{\alpha_k} =$$

$$= (-1)^s \frac{s!}{a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k}\, \alpha_1! \ldots \alpha_k!}.$$

Man gewinnt so eine neue für jede natürliche Zahl n gültige Indentität:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^s \frac{s!}{\alpha_1^{\alpha_1} \ldots \alpha_k^{\alpha_k} \alpha_1! \ldots \alpha_k!} = 1.$$

§ 5. Schlußbemerkung und Literaturhinweise.

Wie ersichtlich, genügt es zur Ableitung der Formeln § 2 I und § 3 II, nur die Existenz der vorkommenden Ableitungen von $f(z)$ und $f_1 \neq 0$ vorauszusetzen. Obige Deduktion bedient sich überhaupt keines Hilfsmittels aus der Theorie der analytischen Funktionen, wie etwa der Bürmann-Lagrange'schen Reihe. Aus dieser ergibt sich naturgemäß Formel § 3 II und es seien in diesem Zusammenhang einige Hinweise auf Literaturstellen, die zu dem hier behandelten Thema in nähere Beziehung gebracht werden können, gegeben. So folgt[2] Formel § 3 II aus der Reihe von Lagrange bei Benützung einer Formel von *Götting*[3] für die höheren Ableitungen der Potenzen einer Funktion einer Variablen. *Most*[4] hat mit Zuhilfenahme des Cauchy'schen Integrals die Götting'sche Formel auf die Derivierten einer Funktion *von beliebig vielen Variablen* ausgedehnt. Diese Resultate hat *Königsberger*[5] auf elementarem Wege, ähnlich wie in dieser Arbeit, mit Benützung einer Rekursionsformel nach der Methode der vollständigen Induktion hergeleitet. Schließlich sei noch auf eine Arbeit von *Fr. Mayer*[6] „Über die höheren Ableitungen eines Quotienten zweier Funktionen" verwiesen.

[2] Nach freundlicher Mitteilung von *Radon*.
[3] *R. Götting*, Math. Ann. 3 (1870), S. 276.
[4] *R. Most*, Math. Ann. 4 (1871), S. 499.
[5] *L. Königsberger*, Math. Ann. 27 (1886), S. 473.
[6] *Fr. Mayer*, Monh. 1 (1890), S. 33.

Überall unlösbare lineare partielle Differentialgleichungen.

Von

Hans Hornich, Graz.

(Eingelangt am 12. Oktober 1954.)

Peano[1] hat bewiesen, daß die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^1 = \varphi(x, y) \tag{1}$$

auch dann stets eine Lösungskurve durch einen Punkt P eines Gebietes G hat, wenn $\varphi(x, y)$ nur als stetig in G vorausgesetzt wird; allerdings braucht die Lösungskurve in einer Umgebung von P nicht eindeutig zu sein, wenn $\varphi(x, y)$ nicht etwa zusätzlich einer Lipschitzbedingung genügt, sondern es können ev. mehrere, ja unendlichviele Lösungskurven von (1) durch P hindurchgehen. Es kann nun weiter sein, daß zwei Lösungskurven durch P sich noch in einem zweiten Punkt P' treffen („Doppelwege" zwischen P und P'), ja es kann sein, daß es unendlichviele solche Doppelwege gibt und daß dabei P' beliebig nahe an P gelegen sein kann. Daraus folgt für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{2}$$

($f(x, y)$ stetig in G), daß diese $u.\ U.$ in einer Umgebung von P keine Lösung hat.

Das Ziel dieser Arbeit ist, ein solches System von Doppelwegen und damit die Unlösbarkeit von (2) nicht nur in einem Punkt, sondern im ganzen Gebiet G nachzuweisen. Die Schwierigkeit solche Funktionen

[1] Math. Ann. **37**, 182—228. Für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1) vgl. ferner *Perron*, Math. Ann. **76**, 471—484, u. Jb. DMV **35**, 202f.; *Bompiani, Atti dei Lincei*, Roma I 1 (1925) 298—302; *Tamarkine* M. Z. **16**, 207—213; ein Beispiel mit mindestens zwei Lösungskurven durch jeden Punkt gibt *Lavrentieff*, M. Z. **23**, 197—209. Eine zusammenfassende Darstellung bei *M. Müller*, Jb. d. DMV **37**, 33—48.

$\varphi(x, y)$ zu konstruieren, besteht darin, daß es gilt, das Vorhandensein *unendlichvieler, überall dicht liegender solcher Doppelwege* mit der Stetigkeit von $\varphi(x, y)$ zu vereinen.

Wir zeigen folgenden Satz über unlösbare partielle Differentialgleichungen:

In jedem beschränkten Gebiet G der $x\,y$-Ebene können wir eine stetige Funktion $\varphi(x, y)$ und eine lineare Funktion $l(x, y)$ konstruieren, für welche die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = l(x, y) \tag{3}$$

überall in G unlösbar ist: d. h. es gibt in keinem Teilgebiet G' von G eine differenzierbare Funktion u, die (3) *genügt.*

Bei festem φ ist dies sogar für „fast" alle linearen Funktionen l der Fall[2].

I.

Sei

$$g_n(x) = 2^{-2n} \sin^2 (x \,.\, 2^n) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

die Ableitung also

$$g'_n(x) = 2^{-n} \sin (x \,.\, 2^{n+1}). \tag{5}$$

Wir bezeichnen mit S_n die Menge, die aus der Kurve

$$y = g_n(x), \quad 0 \leqq x \leqq \pi\, 2^{-n}$$

und der Strecke

$$y = 0 \qquad 0 \leqq x \leqq \pi\, 2^{-n}$$

sich zusammensetzt. Auf S_n sei die Funktion definiert:

$$\begin{aligned} \psi_n(x, y) &= g'_n(x) \quad \text{für} \quad y = g_n(x) \\ &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad y = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Im folgenden sei stets $n > 1$; dann ist für zwei Werte x', x'' mit $0 \leqq x'$, $x'' \leqq \pi \,.\, 2^{-n}$ stets

$$\begin{aligned} |\, g'_n(x') - g'_n(x'') \,| &= 2^{-n+1} \,|\, \sin [(x' - x'')\, 2^n] \cos [(x' + x'')\, 2^n] \\ &\leqq 2 \,|\, x' - x'' \,| \leqq 2 \sqrt{|\, x' - x'' \,|} \end{aligned} \tag{7}$$

Ferner ist

---

[2] Zusatz bei der Korrektur: In einer in den „Rendiconti di Torino, 1954—55" erscheinenden Arbeit wird sogar für alle stetigen und stetig nach y differenzierbaren Funktionen f gezeigt, daß (2) unlösbar ist in jedem Teilgebiet von G, in dem die Ableitung von f nach y nicht identisch verschwindet.

$$| g'_n(x) | \leqq 2^{-n+1} | \sin (x \cdot 2^n) | \leqq 2 \sqrt{g_n(x)} \tag{8}$$

Also gilt für beliebige Punkte P_1, P_2 auf S_n

$$| \psi_n(P_1) - \psi_n(P_2) | \leqq 2 \sqrt{P_1 P_2}, \tag{9}$$

unter $P_1 P_2$ den euklidischen Abstand dieser Punkte verstanden.

Wir denken uns ferner die Menge S_n um den Nullpunkt um einen Winkel α gedreht und die so entstandene Menge mit $S_n(\alpha)$ bezeichnet; wir nehmen dabei $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - 2^{-n}$. Auf $S_n(\alpha)$ definieren wir dann die Funktion

$$\psi_n(\alpha; x, y) = \operatorname{tg} [\operatorname{arctg} \psi_n(\xi, \eta) + \alpha], \tag{10}$$

wobei (x, y) und (ξ, η) die nach dieser Drehung sich entsprechenden Punkte von $S_n(\alpha)$ und S_n sind.

Wegen $| \psi_n(\xi, \eta) | \leqq 2^{-n}$ und

$$| \operatorname{arctg} \psi_n(\xi, \eta) | \leqq \operatorname{arctg} 2^{-n} < 2^{-n}$$

ist nach unserer Voraussetzung über α auch $\psi_n(\alpha; x, y)$ auf $S_n(\alpha)$ sinnvoll und stetig.

Wir schätzen wieder die Differenz zweier ψ-Werte auf $S_n(\alpha)$ ab. Liegen die Punkte P_1, P_2 von S_n auf $\eta = g_n(\xi)$ und sind P_1', P_2' die entsprechenden Punkte auf $S_n(\alpha)$, so ist

$$\psi_n(\alpha; P_1') - \psi_n(\alpha; P_2') = \frac{\sin [\operatorname{arctg} g'_n(\xi_1) - \operatorname{arctg} g'_n(\xi_2)]}{\cos [\operatorname{arctg} g'_n(\xi_1) + \alpha] \cos [\operatorname{arctg} g'_n(\xi_2) + \alpha]}$$

also

$$\begin{aligned} | \psi_n(\alpha; P_1') - \psi_n(\alpha; P_2') | &\leqq \frac{| g'_n(\xi_1) - g'_n(\xi_2) |}{\cos^2 (2^{-n} + |\alpha|)} \\ &\leqq \frac{2 \sqrt{P_1' P_2'}}{\cos^2 (2^{-n} + |\alpha|)} \end{aligned} \tag{11}$$

Liegt einer der Punkte, etwa P_2, auf $\eta = 0$ und P_1 auf $\eta = g_n(\xi)$, so ist

$$| \psi_n(\alpha; P'_1) - \psi_n(\alpha; P'_2) | = \left| \frac{\psi_n(P_1) + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \psi_n(P_1) \operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right|$$

$$\leqq | \psi_n(P_1) | \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-n} |\operatorname{tg} \alpha|} \leqq 2 \sqrt{P'_1 P'_2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-n} |\operatorname{tg} \alpha|} \tag{12}$$

Nach (11) und (12) ist daher für alle P_1', P_2' auf $S_n(\alpha)$:

$$|\psi_n(\alpha; P_1') - \psi_n(\alpha; P_2')| \leqq \sqrt{\overline{P_1' P_2'}} \operatorname{Max}\left(\frac{2}{\cos^2(2^{-n} + |\alpha|)}, \frac{2}{\cos^2 \alpha\,(1 - 2^{-n}|\operatorname{tg}\alpha|)}\right) \tag{13}$$

Diese Abschätzungen werden wir später zu gebrauchen haben.

II.

Wir definieren eine Folge von abgeschlossenen, gleichmäßig beschränkten Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ und eine Funktion $\varphi(x, y)$ auf diesen Mengen. Die Mengen liegen alle auf der Kreisscheibe

$$B\colon\ x^2 + y^2 < \frac{1}{16^2}.$$

Es sei $K_1 = S_{k_1}$ (mit $k_1 \geqq 6$) und $\varphi(x, y)$ auf K_1 die oben definierte Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \psi_{k_1}(x, y) &= g'_{k_1}(x) \quad \text{für } y = g_{k_1}(x) \\ &= 0 \qquad\quad \text{für } y = 0 \end{aligned}$$

mit

$$0 \leqq \alpha \leqq \pi \cdot 2^{-k_1} < \frac{1}{16}.$$

Wir nehmen an, es seien bereits die Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ definiert und $\varphi(x, y)$ eine auf K_{n-1} definierte Funktion, so daß mit je zwei Punkten P_1, P_2 auf K_{n-1} gilt:

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| \leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{P_1 P_2}}, \tag{14}$$

C_{n-1} eine Konstante; für $n = 2$ können wir nach (9) die Konstante $C_1 = 2$ nehmen.

Wir konstruieren die Menge K_n und erweitern die Definition von $\varphi(x, y)$ auf K_n.

Wir wählen in B einen nicht auf K_{n-1} gelegenen Punkt Q_n. Dann gibt es einen Wert A, so daß die durch die Festsetzung $\varphi(Q_n) = A$ erweiterte Funktion φ auf $K_{n-1} + \{Q_n\}$ gleichfalls die Ungleichung (14) erfüllt.

Seien nämlich P' und P'' auf K_{n-1} beliebig gewählt. Die Zahl A genüge den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |\varphi(P') - A| &\leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{P' Q_n}} \\ |\varphi(P'') - A) &\leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{P'' Q_n}} \end{aligned} \tag{15}$$

Diese beiden Interwalle haben mindest einen Punkt gemein: denn es ist

$$|\varphi(P') - \varphi(P'')| \leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{P'\,P''}}$$

und ferner

$$P'\,Q_n + P''\,Q_n \geqq P'\,P'',$$

also auch

$$P'\,Q_n + P''\,Q_n + 2\sqrt{\overline{P'\,Q_n}\,.\,\overline{P''\,Q_n}} \geqq P'\,P''$$

und

$$\sqrt{\overline{P'\,Q_n}} + \sqrt{\overline{P''\,Q_n}} \geqq \sqrt{\overline{P'\,P''}}.$$

Daher ist

$$|\varphi(P') - \varphi(P'')| \leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{P'\,Q_n}} + C_{n-1}\sqrt{\overline{P''\,Q_n}}$$

und die Intervalle (15) haben mindest einen Punkt gemein.

Bilden wir für jedes P aus K_{n-1} das Intervall

$$[\varphi(P) - C_{n-1}\sqrt{\overline{P\,Q_n}},\ \varphi(P) + C_{n-1}\sqrt{\overline{P\,Q_n}}],$$

so haben je zwei solche Intervalle mindest einen Punkt gemein, und nach einem bekannten Satz von *Helly* haben dann alle diese Intervalle mindest einen Punkt gemein; einen solchen gemeinsamen Punkt nennen wir A und setzen $\varphi(Q_n) = A$. Für diese Festsetzung gilt dann

$$|\varphi(Q_n) - \varphi(P)| \leqq C_{n-1}\sqrt{\overline{Q_n\,P}} \tag{16}$$

für jedes P aus K_{n-1}.

Wir setzen dann

$$\operatorname{arctg}\varphi(Q_n) = \alpha_n, \qquad |\alpha_n| < \pi/2.$$

Wir denken uns mit einem sogleich näher zu bestimmenden k_n die Menge $S_{k_n}(\alpha_n)$ parallelverschoben, so daß der Nullpunkt in den Punkt Q_n übergeht: die so erhaltene Menge sei Γ_n und wir setzen $K_n = K_{n-1} + \Gamma_n$.

Wir wählen nun k_n so groß, daß

1. Γ_n ganz in B liegt,

2. $2^{-k_n} < \dfrac{\pi}{2} - |\alpha_n|$ ist;

wir wählen nun ein C_n mit

$$C_n > \operatorname{Max}\left(C_{n-1}, \frac{2}{\cos^2\alpha_n}\right) \tag{17}$$

und wählen weiter k_n so groß, daß

$$3.\ C_n > \operatorname{Max}\left[\frac{2}{\cos^2(|\alpha_n| + 2^{-k_n})},\ \frac{2}{\cos^2\alpha_n\,(1 - |\operatorname{tg}\alpha_n|\,\overline{2^{-k_n}})}\right] \tag{17a}$$

ist (aus 2) folgt sofort $|\operatorname{tg}\alpha_n| 2^{-k_n} < 1$);

4. Wenn d_n die Entfernung des Punktes Q_n von K_{n-1} ist, sei

$$\sqrt{\pi 2^{-k_n}} \leqq \tfrac{1}{2} \frac{C_n - C_{n-1}}{C_n} \sqrt{d_n};$$

daraus folgt auch, daß Γ_n fremd zu K_{n-1} ist;

5. Für alle P_1 auf Γ_n und alle P_2 auf K_{n-1} gelte

$$\operatorname*{Min}_{P_1, P_2} \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{\sqrt{Q_n P_2}} \geqq 1 - \tfrac{1}{2} \frac{C_n - C_{n-1}}{C_n}.$$

Auf Γ_n sei dann die Funktion φ definiert durch

$$\varphi(P) = \operatorname{tg}[\operatorname{arctg} \psi_{k_n}(\overline{P}) + \alpha_n]; \tag{18}$$

dabei sei $\overline{P}$ der Punkt von S_{k_n}, der nach Drehung von S_{k_n} um den Winkel α_n und Parallelverschiebung um $O Q_n$ in den Punkt P von Γ_n übergeht. Wegen $\psi_{k_n}(O) = 0$ ist $\varphi(Q_n) = \operatorname{tg}\alpha_n$; wegen unserer Wahl von k_n ist φ auf Γ_n und damit auch auf K_n sinnvoll und stetig.

Wir zeigen, daß auf K_n die Ungleichung

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| \leqq C_n \sqrt{P_1 P_2} \tag{19}$$

für alle P_1, P_2 auf K_n erfüllt ist.

(19) ist sicher richtig, wenn P_1 und P_2 zu K_{n-1} gehören, wegen (14) und (17). Ferner wegen (13) und (17a), wenn P_1 und P_2 zu Γ_n gehören. Sei endlich P_1 auf Γ_n, P_2 auf K_{n-1} gelegen, dann ist:

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| \leqq |\varphi(P_1) - \varphi(Q_n)| + |\varphi(Q_n) - \varphi(P_2)| \leqq$$
$$\leqq C_n \sqrt{P_1 Q_n} + C_{n-1} \sqrt{Q_n P_2} \tag{20}$$

wegen (16). Wegen der Bedingung (4) für k_n ist wegen $P_1 Q_n \leqq \pi 2^{-k_n}$ dann

$$C_n \sqrt{P_1 Q_n} \leqq \tfrac{1}{2}(C_n - C_{n-1}) \sqrt{P_2 Q_n}$$

und wegen der Bedingung (5)

$$C_n \sqrt{P_1 P_2} \geqq C_n \sqrt{Q_n P_2} - \tfrac{1}{2}(C_n - C_{n-1}) \sqrt{Q_n P_2}.$$

Diese beiden Ungleichungen ergeben

$$C_n (\sqrt{Q_n P_1} + \sqrt{Q_n P_2}) \leqq (C_n - C_{n-1}) \sqrt{Q_n P_2} + C_n \sqrt{P_1 P_2}$$

und in Zusammenhang mit (20) die Ungleichung (19).

III.

Wir erinnern an die Bestimmung von C_n nach (17) und fragen, ob wir die C_n so wählen können, daß diese beschränkt bleiben.

Für den Nullpunkt O ist $\varphi(O) = 0$ und nach (14) für jedes P in K_n

$$|\varphi(P)| \leqq C_n \sqrt{O\,P};$$

und weil P in B liegt, also $O\,P < \frac{1}{16^n}$ ist,

$$|\varphi(P)| < \frac{C_n}{4}$$

Es ist dann auch

$$|\operatorname{tg} \alpha_n| = |\varphi(Q_n)| < \frac{C_n}{4} \text{ und}$$

$$\frac{2}{\cos^2 \alpha_n} < 2 + \frac{C^2_n}{8}$$

Es genügt daher

$$C_{n+1} \geqq \operatorname{Max}\left(C_n, 2 + \frac{C^2_n}{8}\right) \text{ und } C_{n+1} > C_n$$

zu wählen. Setzen wir schließlich $C_1 = 2$ und

$$C_{n+1} = 2 + \frac{C^2_n}{8} \tag{21}$$

so sind diese Ungleichungen wegen $C_n < 4$ und

$$C_{n+1} - C_n = \left(\frac{C_n}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 > 0$$

stets erfüllt. Die Folge der Zahlen C_n mit $C_1 = 2$ und (21) ist aber konvergent und ihr Limes $= 4$. Also können wir die C_n stets < 4 wählen und es gilt für alle Punktepaare $P_1\,P_2$ aus der Summenmenge $\Sigma_n K_n$ gleichmäßig

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| \leqq 4\sqrt{P_1\,P_2}. \tag{22}$$

Wir denken uns die Q_n so gewählt, daß sie in B dicht liegen; dann liegt auch $\Sigma_n K_n$ in B dicht und wir können die Funktion φ so ergänzen, daß sie auf der ganzen Kreisscheibe B definiert ist, und zwar stetig: es ist dann φ gleichmäßig stetig in B und es gilt in B überall (22).

IV.

Wir untersuchen in B die Differentialgleichung

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = l(x, y) \tag{23}$$

wo $l(x, y)$ eine lineare Funktion von x, y ist.

Wir bemerken vorerst, daß die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \varphi(x, y) \tag{24}$$

in jedem Punkt Q_n zwei Lösungskurven hat, die durch die gerade Strecke und die der Kurve $\eta = g_{k_n}(\xi)$ kongruente Kurve in Γ_n dargestellt werden.

Setzen wir für $\varphi(x, y)$ in Γ_n nach (18) ein, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}\,\psi_{k_n}(\bar{P}) + \alpha_n]\,\frac{\partial u}{\partial y} = l(x, y) \quad \text{oder}$$

$$\cos\alpha_n\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha_n\frac{\partial u}{\partial y} + \psi_{k_n}(\bar{P})\left[-\sin\alpha_n\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\alpha_n\frac{\partial u}{\partial y}\right] =$$

$$= l(x, y)\,[\cos\alpha_n - \sin\alpha_n\,\psi_{k_n}(\bar{P})] \tag{25}$$

Führt man die Koordinaten von $\bar{P}(\xi, \eta)$ ein, so ist

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_n)\cos\alpha_n + (y - y_n)\sin\alpha_n \\ \eta &= -(x - x_n)\sin\alpha_n + (y - y_n)\cos\alpha_n \end{aligned} \tag{26}$$

wenn x_n, y_n die Koordinaten von Q_n sind. Dann ist (25)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi_{k_n}(\bar{P})\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = l_1(\xi, \eta)\,[\cos\alpha_n - \sin\alpha_n\,\psi_{k_n}(\bar{P}). \tag{27}$$

Wegen $|\operatorname{tg}\alpha_n| < 1$ und $|\psi_{k_n}| < 2^{-k_n}$ ist stets $\cos\alpha_n - \sin\alpha_n\,\psi_{k_n}(\bar{P}) > 0$.

Nehmen wir für $l(x, y)$ die für die gerade Strecke von Γ_n verschwindende Funktion, also

$$l(x, y) = -(x - x_n)\sin\alpha_n + (y - y_n)\cos\alpha_n = \eta$$

so ist sofort zu sehen, daß (27) auf Γ_n unlösbar ist:

Integrieren wir nämlich (27) längs der Strecke $\eta = 0$ von $\xi = 0$ bis $\xi = \pi \cdot 2^{-k_n}$, so ist ($u(x, y) = u_1(\xi, \eta)$)

$$u_1(\pi \cdot 2^{-k_n}, 0) - u_1(0, 0) = 0;$$

integrieren wir aber längs der Kurve $\eta = g_{k_n}(\xi)$ zwischen denselben Punkten, so ist, weil die rechte Seite von (27) stets > 0 ist, das Integral

$$u_1(\pi\,2^{-k_n}, 0) - u_1(0, 0) > 0$$

und der Widerspruch gezeigt.

Zu jedem Q_n gibt es also eine lineare Funktion l_n, für die $Lu = l_n$ auf Γ_n unlösbar ist, nämlich die auf der geraden Strecke von Γ_n verschwindende lineare Funktion.

Wir zeigen nun weiter, daß es lineare Funktionen $l(x, y)$ gibt, so daß $L u = l(x, y)$ auf jedem Teilgebiet von B unlösbar ist.

Da die Γ_n paarweise fremd sind, können nur endlichviele k_n denselben Wert haben und es ist $k_n \to +\infty$ mit $n \to \infty$. Da die Q_n in B dicht liegen, liegt in jedem Teilgebiet G von B ein (und sogar unendlichviele) Γ_n.

Diejenigen linearen Funktionen l, für welche $L u = l$ in einem Gebiete G lösbar ist, bilden einen linearen Raum Λ: mit l_1 und l_2 ist auch $a l_1 + b l_2$ (a, b Konstante) so beschaffen, daß $L u = a l_1 + b l_2$ lösbar ist in G. Da es nur drei linear unabhängige lineare Funktionen l gibt und G eine Menge Γ_n enthält, so daß $L u = l_n$ unlösbar ist in G, kann Λ höchstens zweidimensional sein.

Wir nehmen ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem offener Mengen $G_1, G_2, \ldots$ in B, so daß jeder Punkt von B in beliebig kleinen offenen Mengen G_i liegt. Zu jedem G_i gehört eine höchstens zweidimensionale Menge Λ_i von linearen Funktionen, für welche $L u = l$ lösbar ist. Die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ ist wieder höchstens zweidimensional, es gibt daher lineare Funktionen l, so daß $L u = l$ für jedes G_i unlösbar ist, unlösbar also auch für jede beliebige offene Menge G von B.

Damit ist der anfangs angekündigte Satz für das Kreisbild B gezeigt, und zwar sogar für „fast" alle linearen Funktionen $l(x, y)$. Durch eine einfache Streckungstransformation läßt sich der Satz auf eine Kreisscheibe vom Radius R und damit auf jedes beschränkte Gebiet ausdehnen: Setzen wir

$$x = \frac{x'}{16\,R} \qquad y = \frac{y'}{16\,R}$$

so entspricht B die Kreisscheibe $x'^2 + y'^2 < R^2$ und (23) die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \varphi\left(\frac{x'}{16\,R}, \frac{y'}{16\,R}\right)\frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{1}{16\,R}\, l\left(\frac{x'}{16\,R}, \frac{y'}{16\,R}\right).$$

Für zwei Punkte P_1, P_2 aus $x'^2 + y'^2 < R^2$ gilt dann mit

$$\varphi\left(\frac{x'}{16\,R}, \frac{y'}{16\,R}\right) = \bar{\varphi}(x', y') \text{ an Stelle von (22)}$$

$$|\,\bar{\varphi}(P_1) - \bar{\varphi}(P_2)\,| \leqq \sqrt{\frac{\overline{P_1 P_2}}{R}}.$$

Über die Summe $\sum_{p \leqq N} e(\alpha p)$.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 14. Oktober 1954.)

Sei $S = \sum_{p \leqq N} e(\alpha p) = S(\alpha, N)$, wo p Primzahlen bezeichnet, $0 < \alpha < 1$ ist und wie üblich $e^{2\pi i x} = e(x)$ gesetzt wird. Bekanntlich spielen solche Summen in der *Vinogradoff*'schen Behandlung des Goldbach'schen Problems eine grundlegende Rolle. *Vinogradoff* hat gezeigt:

Sei

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad |\theta| \leqq 1, \quad 1 < q < N, \quad (a, q) = 1;$$

dann gilt

$$S \ll N r^{9/2} ((q^{-1} + qN^{-1})^{1/2} + H^{-1}) \tag{1}$$

wobei $r = \log N$, $H = \exp({}^1/_2\sqrt{r})$ und $A \ll B$ dasselbe bedeutet, wie $A = 0(B)$. (Siehe *Vinogradoff*, Metod Trigonometrischeskych Summ w Teorii Tschisel, Kap. IX oder die englische Bearbeitung dieses Buches von *K. F. Roth* und *Anne Davenport*, The Method of Trigonometrical sums in the Theory of Numbers, London 1954, S. 131).

Indem man an einer Stelle des Beweises einen Satz von *de Bruijn* (*N. G. de Bruijn*, On the number of positive integers $\leqq x$ and free of prime factors $\geqq y$, Indagationes Mathem. 13 (1951) 50–60) verwendet, kann man sogar

$$S \ll N r^{9/2} ((q^{-1} + qN^{-1})^{1/2} + H_1^{-1}) \tag{2}$$

$H_1 = \exp\{({}^1/_2 - \varepsilon)\sqrt{r \log r}\}$, ($\varepsilon > 0$, beliebig fest) beweisen. Zwar hat *Vinogradoff* selbst gezeigt

$$S \ll N ((q^{-1} + qN^{-1})^{1/2 - \varepsilon} + N^{-1/8 + \varepsilon}) \tag{3}$$
$$(\exp r^{1/6} \leqq q \leqq N^{1/2})$$

(vgl. das oben genannte Buch Kap. 9, Satz 3) und z. B.

$$S \ll N \exp(c_1 \log^2 r) ((q^{-1} + qN^{-1})^{1/2} + N^{-6/16}). \tag{4}$$
$$(c_1 > 0), \ 0 < q \leqq N)$$

(vgl. etwa *Vinogradoff*, Isbrannye Trudy, Moskau 1952, S. 209), was für die meisten q bedeutend besser ist als (2). Für manche q ist jedoch (2) auch noch ein wenig besser als (3) und (4). Setzen wir z. B.

$$q = \exp\left({}^1/_4 \sqrt{r \log r}\right),$$

so folgt aus (4) nur $S \ll N \exp\left(c_1 \log^2 r\right)\left(q^{-1/2} + o\,(1)\right)$ während aus (2) sich ergibt $S \ll N \exp\left({}^9/_2 \log r\right)\left(q^{-1/2} + o\,(1)\right)$.

Der Beweis von (2) soll im folgenden kurz angedeutet werden.

Zunächst ist (vgl. *Roth-Davenport*, loc. cit. S. 132)

$$S = \sum_{d \mid P} \mu(d) \sum_{m \leq N/d} e\,(\alpha\, d\, m) + 0\,(\sqrt{N}),$$

wobei $P = \prod_{p \leq \sqrt{N}} p$. Dies wird dann in Summen $S\,(M)$ zerlegt, wobei

$$S\,(M) = \sum_{d \mid P} \sum_{M < m \leq M'} e(\alpha\, d\, m)$$

mit $M < M' \leq 2M$. Die Summe der $S(M)$ mit $M \geqq H_1$ wird genau so wie die analoge Summe im ursprünglichen Beweis abgeschätzt und liefert eine Schranke derselben Form wie auf der rechten Seite von (2).

Für ein $S(M)$ mit $M < H_1$ werden nun zuerst die Glieder von $\sum_{d \mid P}$ betrachtet, für die d keinen Primteiler $\geqq H_1^2$ hat. Nach *de Bruijn* (loc. cit. 1. 6) ist die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leqq x$, die keinen Primteiler $\geqq y$ haben

$$\ll x \log^2 y \exp\left(-u \log u + o\,(u \log u)\right), \quad u = \log x / \log y,$$

und die Anzahl der genannten d ist daher, wie man sofort nachrechnet,

$$\ll \frac{N}{M} \exp\left(-{}^1/_2 \sqrt{r \log r}\right) \ll \frac{N}{M\, H_1}$$

Ihr Beitrag zu allen $S(M)$ zusammen ist also $\ll Nr/H_1$. Der Rest des Beweises verläuft dann wörtlich wie der Beweis von (1), wenn man nur H_1 an Stelle von H setzt.

[1] Genauer für $\exp r^{\varepsilon_0} \leqq q \leqq \tau$, wo $N^{1/2} \leqq \tau \leqq N \exp\left(-r^{\varepsilon_0}\right)$

$$\text{und } \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\,\tau}, \quad |\,\theta\,| \leqq 1.$$

Quadriken als Bewegflächen.

Von

Heinrich Brauner, Wien.

(Eingelangt am 21. Oktober 1954.)

I. Einleitung.

Die ∞^3 Kegelschnitte, die auf einer vorgelegten Quadrik Ω liegen, sind i. a. zu je ∞^1 untereinander kongruent, da die Gestalt eines Kegelschnittes etwa durch Angabe der beiden Hauptachsenlängen bestimmt ist. Es muß daher möglich sein, einen solchen Kegelschnitt ohne Gestaltsänderung auf der Fläche kontinuierlich zu bewegen. Dieser — sogar auf ∞^2 Arten möglichen — Erzeugung einer *Quadrik als Bewegfläche* (eines Kegelschnittes) scheint man sich kaum bewußt geworden zu sein, obwohl gerade solchen Flächen, die auf mehrfache Art durch Bewegung starrer Kurven erzeugbar sind, vor einiger Zeit ein gewisses Interesse galt[1]. Andererseits kann die geometrische Kennzeichnung der Scharen kongruenter Kegelschnitte einer Quadrik auf Grund zweier älteren Arbeiten von *M. Krewer* und *W. Ludwig*, die eine Abbildung derKegelschnittslagen auf die Punkte gewisser Raumkurven 3. Ordnung vollziehen[2], als ziemlich geklärt gelten; die Kennzeichnung der kinematischen Verhältnisse steht allerdings noch aus.

In Verallgemeinerung der üblichen Auffassung, derzufolge als „Bewegflächen" die Ortsflächen bewegter *starrer Kurven* anzusehen sind, mag man unter Bewegflächen im weiteren Sinn auch die Hüllgebilde

[1] *B. Gambier*, Sur les surfaces susceptibles d'être engendreés de plusieurs façons différentes par le déplacement d'une courbe invariable. C. R. Paris 158 (1914), 1155.

L. Ballif, Sur les surfaces engendreés de deux manières différentes par le mouvement d'une courbe indéformable. C. R. Paris 158 (1914), 1484.

[2] *M. Krewer*, Über das Problem, eine Fläche 2. Grades in einem der Gestalt und Größe nach gegebenen Kegelschnitt zu schneiden. Arch. d. Math. u. Phys., II. Reihe, 12. Bd. (1894), 185.

W. Ludwig, Über das Problem usw. Arch. d. Math. u. Phys., III. Reihe, 12. Bd. (1907), 219.

bewegter *starrer Flächen* verstehen. Mit „Bewegung" ist dabei stets eine zwangsläufige, d. h. einparametrige kontinuierliche Lagenänderung gemeint. Die erzeugende Fläche berührt mithin die erzeugte jeweils längs einer Linie („Charakteristik"), und die ∞^1 gemeinsamen Flächennormalen längs der Charakteristik gehören zufolge einem Elementarprinzip der räumlichen Kinematik einem Strahlgewinde an.

Jede *Quadrik* ist nun auch in diesem erweiterten Sinne „mehrfache Bewegfläche", und zwar kann sie auf ∞^3 Arten als *Hüllgebilde einer starren Fläche 2. Ordnung* erzeugt werden, die sie in jeder Lage längs eines Kegelschnittes berührt. Die grundsätzliche Überlegung ist ebenso einfach wie diejenige, die den Ausgangspunkt bildete: Einer vorgelegten Quadrik Ω kann man längs jedem ihrer ∞^3 Kegelschnitte ∞^1 Flächen 2. Ordnung Φ anschreiben; diese bilden die von Ω und der doppelt gezählten Berührebene aufgespannte Büschelschar. Unter diesen ∞^4 Flächen Φ müssen nun je ∞^1 kongruente auftreten, da die Gestalt einer Quadrik etwa durch die drei Hauptachsenlängen bestimmt ist.

Der näheren analytischen Verfolgung dieses Gedankens, der von *W. Wunderlich* stammt, ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Die Ausführung kann als die natürliche Fortsetzung des von *M. Krewer* eingeschlagenen Weges angesehen werden. Seine Ergebnisse stellen sich als Grenzfall ein, wenn man die erzeugende Quadrik Φ zu einem Kegelschnitt „abplattet". Ein anderer bemerkenswerter Sonderfall tritt durch die Beschränkung auf singuläre Flächen Φ auf. Man gelangt so zu der ∞^2-fachen Erzeugung einer Quadrik durch einen *Kegel*, was in gewissem Sinn dual ist zur Erzeugung durch einen Kegelschnitt.

Zwischendurch ergibt sich Gelegenheit, auch die Systeme der ∞^2 *ähnlichen* und der ∞^3 *volumsgleichen* Berührquadriken Φ der Grundfläche Ω zu charakterisieren.

Es erweist sich als notwendig, die Annahme von Quadriken mit und ohne Mittelpunkt in der Behandlung zu trennen.

II. Mittelpunktsquadriken als erzeugte und erzeugende Flächen.

1. Kongruente angeschriebene Quadriken.

Die Gleichung einer Mittelpunktfläche 2. Grades Ω in einem kartesischen Normalkoordinatensystem, dessen Achsen in den Symmetrieachsen der Fläche liegen, hat die Gestalt:

$$ax^2+by^2+cz^2+d=0, \tag{1}$$

wobei die Vorzeichen von a, b, c die Art der Fläche bestimmen und $d = 0$ die Kegel kennzeichnet. Bei nicht singulären Flächen kann $d = 1$ gesetzt werden. Die Ebene

$$ux+vy+wz+1 = 0 \tag{2}$$

trifft Ω i. a. einem Kegelschnitt; die doppelt gezählte Ebene (2) und die Fläche Ω bestimmen eine *Büschelschar*

$$x^2(u^2 - \lambda a) + y^2(v^2 - \lambda b) + z^2(w^2 - \lambda c) + 2uvxy + 2uwxz + 2vwyz + \\ + 2ux + 2vy + 2wz + (1 - \lambda d) = 0. \tag{3}$$

Läßt man u, v, w und den Büschelparameter λ unabhängig voneinander alle Werte durchlaufen, so erhält man die ∞^4 der Fläche Ω angeschriebenen Quadriken Φ.

Die Flächengleichung (3) hat die Gestalt

$$\sum_1^4 a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \qquad (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = 1) \tag{4}$$

und kann durch Verlagerung des Koordinatensystems auf die Form gebracht werden:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0 \qquad (\delta = 0 \text{ oder } 1). \tag{5}$$

Die symmetrischen Funktionen der Größen α, β, γ lassen sich durch die Koeffizienten von (4) ausdrücken; führen wir die Größen

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = u^2 + v^2 + w^2 - \lambda(a + b + c)$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda[u^2(b + c) + v^2(a + c) + w^2(a + b)] + \lambda^2(ab + ac + bc)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2(u^2bc + v^2ac + w^2ab) - \lambda^3 abc \tag{6}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\lambda^3[(u^2bc + v^2ac + w^2ab)d + abc] + \lambda^4 abcd$$

ein, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= \frac{A_1 A_3}{A_4} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma &= \frac{A_2 A_3^2}{A_4^2} \\ \alpha\beta\gamma &= \frac{A_3^4}{A_1^3} \end{aligned} \tag{7}$$

für die elementarsymmetrischen Funktionen[3]. Zur Festlegung der Größen α, β, γ verwenden wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned} r &= \frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{A_2 \cdot A_3}{A_1 \cdot A_4} \\ s &= \frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha\beta\gamma} = \frac{A_2^2}{A_1 \cdot A_3} \\ t &= \alpha+\beta+\gamma = \frac{A_1 \cdot A_3}{A_4}. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch diese Wahl wird gewährleistet, daß die folgenden Grundgleichungen nur quadratisch in λ sind.

Mit Hilfe der Formeln (6) lassen sich diese Größen durch die Koeffizienten der Gleichung (3) ausdrücken. Vorher führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} A &= u^2(b+c) + v^2(a+c) + w^2(a+b) \\ B &= u^2 bc \quad + v^2 ac \quad + w^2 ab \\ C &= (u^2 bc \quad + v^2 ac \quad + w^2 ab)d + abc \\ D &= u^2 \quad + v^2 \quad + w^2 \\ \varrho &= abc \\ \sigma &= ab + ac + bc \\ \tau &= a \quad + b \quad + c. \end{aligned} \tag{9}$$

Die ersten vier Ausdrücke stellen, gleich Null gesetzt, Flächen 2. Klasse dar, und zwar $A = 0$ einen Kegelschnitt in der Fernebene, $B = 0$ die Fernkurve der Fläche Ω, $C = 0$ die Fläche Ω in Ebenenkoordinaten (wenn sie nicht singulär ist, d. h. $d = 1$), und $D = 0$ den absoluten Kugelkreis.

[3] Die Lösungen der charakteristischen Gleichung der Hauptachsentransformation von (4) gehen in die Größen α, β, γ über, wenn man sie — um zur Darstellung (5) zu gelangen — durch das absolute Glied A_4/A_3 der transformierten Flächengleichung dividiert.

Damit wird (8) zu

$$r = \frac{(\lambda\sigma - A) \,.\, (B - \lambda\varrho)}{(\lambda\varrho d - C) \,.\, (D - \lambda\tau)}$$

$$s = \frac{(\lambda\sigma - A)^2}{(D - \lambda\tau) \,.\, (B - \lambda\varrho)} \tag{10}$$

$$t = \frac{(D - \lambda\tau) \,.\, (B - \lambda\varrho)}{\lambda \,.\, (\lambda\varrho d - C)}$$

oder geordnet nach Potenzen von λ:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2\varrho(\sigma - \tau dr) + \lambda[r(\tau C + \varrho dD) - \sigma B - \varrho A] + (AB - rCD) = 0\\
&\lambda^2(\tau\varrho s - \sigma^2) + \lambda[2\sigma A - s(\tau B + \varrho D)] + (sBD - A^2) = 0 \qquad (11)\\
&\lambda^2(\varrho dt - \tau\varrho) + \lambda(\tau B + \varrho D - tC) - BD = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage für die folgenden Überlegungen.

Durch die Angabe der Größen r, s, t ist die Quadrik Φ der Größe und Gestalt nach vollständig bestimmt. Man kann somit durch Vorgabe gewisser Beziehungen zwischen diesen Größen aus den ∞^4 die Fläche Ω längs eines Kegelschnittes berührenden Flächen bestimmte Teilmannigfaltigkeiten auswählen.

Sucht man nun speziell jene Mittelpunktsflächen heraus, die zu einer vorgelegten Fläche *kongruent* sind, so müssen die Gleichungen (11) für *feste Werte* von r, s, t erfüllt sein. Damit sind aus den der Fläche Ω angeschriebenen Flächen ∞^1 ausgewählt. Die *Trägerebenen ihrer Berührkegelschnitte* sind nicht beliebig wählbar, vielmehr werden die ∞^1 in Frage kommenden eine bestimmte Torse umhüllen, deren Gleichung man durch Elimination des Büschelparameters λ aus den Gleichungen (11) erhält.

Dazu bestimmen wir die Resultante der ersten und dritten Gleichung, die, Null gesetzt, die Bedingung liefert:

$$\begin{vmatrix} r(\tau C+\varrho dD)-\sigma B-\varrho A, & AB-rCD \\ \tau B+\varrho D-tC, & -BD \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma-\tau dr, & r(\tau C+\varrho dD)-\sigma B-\varrho A \\ \varrho dt-\tau\varrho, & \tau B+\varrho D-tC \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma-\tau dr, & AB-rCD \\ \varrho dt-\tau\varrho, & -BD \end{vmatrix}^2. \tag{12}$$

Diese Gleichung in u, v, w stellt eine bestimmte *Fläche 8. Klasse* dar. Analog verfahren wir mit der zweiten und dritten Gleichung, das Verschwinden der Resultante liefert in diesem Falle:

$$\begin{vmatrix} 2\sigma A - s(\tau B + \varrho D), & sBD - A^2 \\ \tau B + \varrho D - tC, & -BD \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau\varrho s - \sigma^2, & 2\sigma A - s(\tau B + \varrho D) \\ \varrho dt - \tau\varrho, & \tau B + \varrho D - tC \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tau\varrho s - \sigma^2, & sBD - A^2 \\ \varrho dt - \tau\varrho, & -BD \end{vmatrix}^2. \tag{13}$$

Auch dies stellt eine *Fläche 8. Klasse* dar, und die *Trägerebenen der Berührkegelschnitte bilden die Verbindungstorse dieser beiden Flächen 8. Klasse.*

In diesem allgemeinen Ergebnis ist auch der *Sonderfall* aller zueinander *kongruenten ebenen Schnitte* einer Quadrik Ω enthalten. Dazu hat man nur die angeschriebenen Flächen Φ zu einem Kegelschnitt „zusammenzudrücken", d. h. zu setzen:

$$\frac{1}{\gamma} = 0. \tag{14}$$

Ein Kegelschnitt

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta = 0$$

ist durch Angabe zweier Größen vollständig bestimmt, und zwar wählen wir — unter Verwendung von (8) und (14) —

$$r = \alpha + \beta, \; s = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta}.$$

Setzt man in den Gleichungen (11) $\lambda = 0$, $1/t = 0$, so erhält man

$$rCD - AB = 0, \; sBD - A^2 = 0. \tag{15}$$

Die Verbindungstorse dieser beiden Flächen 4. Klasse ist die Torse der *Trägerebenen kongruenter Schnitte.* Die zweite Fläche ist allerdings in eine Fernkurve ausgeartet.

Von dieser *Torse 16. Klasse* spaltet sich eine Torse 4. Klasse ab, bestimmt durch die Gleichungen $A = D = 0$. Eine kurze Rechnung ergibt, daß der Kegelschnitt $A = 0$ die acht Geraden zu Tangenten hat, die $B = 0$ und $D = 0$ in ihren vier Schnittpunkten berühren. $A = 0$ und $D = 0$ bestimmen also vier Tangenten des absoluten Kugelkreises, so daß die sich abspaltende Torse 4. Klasse aus *vier Parallelbüschel von Minimalebenen* besteht, die Kegelschnitte mit einer Minimalasymptote aus der Quadrik Ω ausschneiden. Nach (15)ist für diese r und s unbestimmt, so daß sie für unser Problem auszuschließen sind.

Alle Ebenen, die kongruente Kegelschnitte einer Mittelpunktsquadrik tragen, bilden eine Torse 12. Klasse, die dieselben orthogonalen Symmetrien wie die Fläche besitzt.

Zu diesem Satz, der sich schon bei *M. Krewer* findet[2], seien nur einige ergänzende Bemerkungen gemacht.

Faßt man einen bestimmten Kegelschnitt ins Auge, festgelegt durch ein bestimmtes Wertepaar (r, s), so gehört dazu eine Torse 12. Klasse, deren *Fernkurve*

$$F(u, v, w) \equiv sBD - A^2 = 0$$

ist. Diese ist von r unabhängig. Für allgemeine Werte von a, b, c besitzt diese Kurve 4. Klasse keine singulären Tangenten, da die Gleichungen

$$F_u(u, v, w) = F_v(u, v, w) = F_w(u, v, w) = 0$$

i. a. keine gemeinsamen Lösungen haben. Diese Kurve ist daher — wie sich durch Anwendung der Plücker'schen Formeln ergibt — von 12. Ordnung. Ihrer Gleichung entnimmt man, daß sie in den Schnittpunkten der Kegelschnitte $B = 0$ und $D = 0$ Doppelpunkte aufweist und dort diese Kegelschnitte berührt.

Die Fernkurven der Torsen 12. Klasse sind Kurven 4. Klasse, 12. Ordnung, die in den Fernpunkten der Minimalerzeugenden der Quadrik Doppelpunkte besitzen und dort den Fernkegelschnitt der Fläche und den absoluten Kugelkreis berühren.

Aus der Gleichung der anderen Fläche 4. Klasse folgt unmittelbar, daß diese dem Asymptotenkegel der Quadrik umschrieben ist. Ihr gehören acht Parallelbüschel von Minimalebenen an, deren Trägergeraden die gemeinsamen Tangenten der Fernkegelschnitte $A = 0$ und $D = 0$ bzw. $B = 0$ und $D = 0$ sind. Die ersteren bestimmen die Stellung der Minimalebenen durch die Minimalerzeugenden der Quadrik, die letzteren die Stellung der Minimaltangentialebenen des Asymptotenkegels der Quadrik.

2. Ähnliche angeschriebene Quadriken.

Sucht man aus den der Fläche Ω angeschriebenen Quadriken die zu einer vorgegebenen Fläche ähnlichen heraus — es gibt deren offenbar ∞^2 —, so muß man der Gleichung (3) zwei in den Größen α, β, γ *homogene* Bedingungen zur Seite stellen. Als solche wählen wir:

$$s = \frac{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2}{(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma} = \frac{(\lambda\sigma - A)^2}{(D - \lambda\tau) \,.\, (B - \lambda\varrho)} \tag{16}$$

$$q = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma} = \frac{(D - \lambda\tau)^2}{\lambda \,.\, (\lambda\sigma - A)}$$

oder ausgerechnet und nach Potenzen von λ geordnet:

$$\lambda^2(\tau\varrho s - \sigma^2) + \lambda[2\,\sigma A - s(\tau B + \varrho D)] + (sBD - A^2) = 0$$
$$\lambda^2(\sigma q - \tau^2) + \lambda(2\tau D - qA) - D^2 = 0. \tag{17}$$

Die *Trägerebenen der Berührkegelschnitte* umhüllen eine bestimmte Fläche, deren Gleichung sich durch Nullsetzen der Resultante der beiden Gleichungen (17) ergibt zu

$$\begin{vmatrix} 2\sigma A - s(\tau B + \varrho D), & sBD - A^2 \\ 2\tau D - qA, & -D^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau\varrho s - \sigma^2, & 2\sigma A - s(\tau B + \varrho D) \\ \sigma q - \tau^2, & 2\tau D - qA \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tau\varrho s - \sigma^2, & sBD - A^2 \\ \sigma q - \tau^2, & -D^2 \end{vmatrix}^2. \tag{18}$$

Dies ist i. a. eine *Fläche 8. Klasse*, alle Ebenen durch einen Punkt, die Berührkegelschnitte tragen, umhüllen daher i. a. einen *Kegel 8. Klasse*.

Platten wir die angeschriebenen Flächen Φ zu *Kegelschnitten* ab, so muß für alle auf der Fläche Ω liegenden ähnlichen Kegelschnitte gelten: $1/\gamma = 0$, $\lambda = 0$, $1/q = 0$, d. h. alle Trägerebenen ähnlicher Kegelschnitte umhüllen

$$s\,BD - A^2 = 0, \qquad \text{(vgl. 15)}$$

und dies ist die oben diskutierte Fernkurve 4. Klasse, 12. Ordnung.

Alle Ebenen eines Bündels, die aus einer Mittelpunktsquadrik ähnliche Kegelschnitte ausschneiden, bilden einen Kegel 4. Klasse, 12. Ordnung mit denselben orthogonalen Symmetrien wie die Fläche.

Jeder dieser Kegel wird von den zyklischen Ebenen der Quadrik nach bizirkularen Kurven geschnitten.

Ein anderer Sonderfall liegt vor, wenn man die Determinante der angeschriebenen Fläche Φ gleich Null setzt, d. h. *umschriebene Kegel* betrachtet. Das Verschwinden der Determinante

$$A_4 = \lambda^3 (\lambda\varrho - C) = 0$$

liefert

$$\lambda = C/\varrho,$$

und zusammen mit (17) ergibt dies die *Torse der Berührebenen* als Verbindungstorse der beiden Flächen

$$\begin{aligned} s\,\varrho(C\tau - D\varrho) - (C\sigma - A\varrho)^2 &= 0 \\ q\,C(C\sigma - A\varrho) - (D\varrho - C\tau)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Dies ist eine *Torse 16. Klasse*, die jedoch in eine Torse 4. Klasse

$$C\tau - D\varrho = C\sigma - A\varrho = 0$$

und in eine Torse 12. Klasse zerfällt. Die obige Torse 4. Klasse berührt auch die Fläche $A\tau - D\sigma = 0$, da diese derselben Schar von Flächen 2. Grades angehört. Für die Ebenen dieser Torse werden die Größen s und q unbestimmt, doch gilt — wie sich aus (19) ergibt —

$$sq^2 = 0,\ s^2q = 0$$

und das bedeutet:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn man z. B. setzt

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : \varepsilon : \varepsilon^2,$$

wobei ε die dritte Einheitswurzel bedeutet.

Der Ort der Spitzen dieser Kegel ist dann die Schnittkurve jener Flächen, die zu

$$C\sigma - A\varrho = 0,\ A\tau - D\sigma = 0$$

bezüglich der Fläche Ω polar sind; ihre Gleichungen lauten:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 0$$

$$x^2a^2[(b + c)^2 - bc] + y^2b^2[a + c)^2 - ac] + z^2c^2[(a + b)^2 - ab] = 0.$$

Die erste der beiden Flächen ist die *Monge'sche Kugel* der Grundfläche Ω[4].

Die Spitzen jener umschriebenen Kegel, deren rexiproke Achsenquadrate sich verhalten wie $1 : \varepsilon : \varepsilon^2$ *(wobei* ε *die dritte Einheitswurzel bedeutet), liegen auf einem sphärischen Kegelschnitt.*

Die für ein festes Wertepaar (s, q) verbleibende Torse 12. Klasse geht durch Polarisieren an der Grundfläche Ω über in die Ortskurve der Spitzen der umschriebenen kongruenten Kegel; die Kurve liegt auf der zu

$$s\,\varrho(C\tau - D\varrho) - (C\sigma - A\varrho)^2 = 0$$

[4] Die *Monge*'sche Kugel einer Quadrik ist der Ort der Schnittpunkte dreier aufeinander senkrecht stehender Tangentialebenen der Quadrik. Vgl. *G. Salmon—W. Fiedler*, Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1863, 110.

bezüglich Ω polaren Fläche. Ihre Gleichung hat die Gestalt

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \varphi_2 = 0,$$

wobei $\varphi_2 = 0$ die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung ist. Diese Fläche 4. Ordnung besitzt den absoluten Kugelkreis als Doppelkegelschnitt, ist also eine *Zyklide*.

Die Spitzen aller der Fläche umschriebenen kongruenten Kegel erfüllen eine auf einer Zyklide liegende Raumkurve 12. Ordnung.

3. Abbildung kongruenter ebener Schnitte einer Mittelpunktsquadrik und kongruenter umschriebener Kegel auf Punkte von Raumkurven 3. Ordnung.

Alle Ebenen, die aus einer Mittelpunktsquadrik *kongruente Kegelschnitte* ausschneiden, bilden eine Torse 12. Klasse

$$s\,BD - A^2 = 0,\ r\,CD - AB = 0. \tag{15}$$

Die *Transformation*

$$\xi = A,\ \eta = B,\ \zeta = D, \tag{20}$$

die nur von der zugrundegelegten Fläche Ω abhängt und jeder Ebene (u, v, w) einen Punkt (ξ, η, ζ) zuordnet, führt die Gleichungen (15) über in:

$$s\eta\zeta - \xi^2 = 0,\ r(\eta d + \varrho)\,\zeta - \xi\eta = 0.$$

Die erste Gleichung stellt bei variablem s eine *Büschelschar* von *Kegeln 2. Grades* dar, die alle die Ebene $\eta = 0$ in der ζ-Achse, die Ebene $\zeta = 0$ in der η-Achse berühren. Ist die Fläche Ω nicht singulär, d. h. $d = 1$, so bedeutet die zweite Gleichung bei variablem r ∞^1 *hyperbolische Paraboloide* mit den Fernerzeugenden $\eta = 0$ und $\xi = r\zeta$. Alle Flächen haben das Erzeugendenvierseit

$$\zeta = 0,\ \eta = 0 \quad \zeta = 0,\ \xi = 0 \quad \eta + \varrho = 0,\ \eta = 0 \quad \eta + \varrho = 0,\ \xi = 0$$

gemeinsam.

Für ein beliebiges Wertepaar (r, s) besitzen die zugehörigen Flächen die η-Achse zur gemeinsamen Erzeugenden, d. h. die Schnittkurve zerfällt in eine *Gerade* und in eine Raumkurve 3. Ordnung, die wegen des Verhaltens im Unendlichen eine *kubische parabolische Hyperbel* ist. Der sich abspaltenden Geraden entspricht die sich abspaltende Torse $A = D = 0$; das Bild der verbleibenden Torse 12. Klasse ist diese parabolische Hyperbel.

Alle diese Kurven 3. Ordnung gehen durch den Nullpunkt und berühren dort die η-Achse; ihre Schmiegebene ist dabei die Ebene $\zeta = 0$. Außerdem enthalten alle den Fernpunkt der ζ-Achse, wo sie $\eta + \varrho = 0$ zur Schmiegebene besitzen und $\eta = 0$ berühren. Alle ∞^2 in Frage kommenden Raumkurven bilden somit ein *Bündel* von Kurven mit einem *gemeinsamen Schmiegtetraeder*[5]. Dasselbe gilt, wenn Ω ein Kegel ist, d. h. $d = 0$.

Die Torse der Berührkegelschnitte *kongruenter umschriebener Kegel* Φ ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} s\,\varrho(C\tau - D\varrho) - (C\sigma - A\varrho)^2 &= 0 \\ q\,C(C\sigma - A\varrho) - (D\varrho - C\tau)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Durch die Transformation

$$\xi = D\varrho - C\tau, \quad \eta = A\varrho - C\sigma, \quad \zeta = C, \tag{21}$$

die jeder Ebene (u, v, w) einen Punkt (ξ, η, ζ) zuordnet, geht (19) über in

$$q\eta\zeta + \xi^2 = 0, \; s\varrho\xi + \eta^2 = 0.$$

Die erste Gleichung hat dieselbe Gestalt wie vorhin, es liegt wieder eine *Büschelschar von Kegeln 2. Grades* vor. Die zweite Gleichung stellt bei variablem s ∞^1 *parabolische Zylinder* dar, die die Ebene $\xi = 0$ längs der ζ-Achse und die Fernebene längs $\eta = 0$ berühren.

Je zwei Flächen, die zu einem Wertepaar (q, s) gehören, haben die *Erzeugende* $\eta = 0$, $\xi = 0$ gemeinsam, so daß der Schnitt außerdem noch aus einer Raumkurve 3. Ordnung besteht.

Alle diese Raumkurven gehen wieder durch den Nullpunkt, wo sie die η-Achse berühren und die Ebene $\zeta = 0$ zur Schmiegebene besitzen. Außerdem gehen sie alle durch den Fernpunkt der ζ-Achse; aus der Art der Fernkurven der sich schneidenden Flächen folgt, daß es sich um *kubische Parabeln* handelt, die alle die Ferngerade der Ebene $\eta = 0$ berühren. Sie bilden wieder ein *Bündel* von Raumkurven 3. Ordnung mit einem *gemeinsamen Schmiegtetraeder.*

Die Systeme der Torsen 12. Klasse, gebildet von den Trägerebenen kongruenter Schnitte einer Mittelpunktsquadrik bzw. von den Berührkegelschnitten kongruenter umschriebener Kegel, lassen sich durch die Transformation (20) *bzw.* (21) *auf Bündel von Raumkubiken mit einem gemeinsamen Schmiegtetraeder abbilden.*

[5] Vgl. *W. Ludwig*, a. a. O., 224.

4. Volumsgleiche angeschriebene Quadriken.

Durch den Ausdruck

$$p = \alpha.\beta.\gamma \tag{22}$$

ist bei Ellipsoiden das Volumen bestimmt. Wir wollen nun allgemein zwei Mittelpunktsquadriken, bei denen die Größe p gleich ist, *„volumsgleich"* nennen.

Es gilt:

$$p = \frac{r^2 t}{s} = \frac{(B - \lambda\varrho)^4}{\lambda.(\lambda\varrho d - C)} \tag{23}$$

und daraus folgt als *Grundgleichung*:

$$\lambda^4\varrho^3(pd - \varrho) + \lambda^3\varrho^2(4B\varrho - 3pCd) + 3\lambda^2\varrho(pC^2d - 2B^2\varrho) + \\ + \lambda(4B^3\varrho - pC^3) - B^4 = 0. \tag{24}$$

Es gibt also ∞^3 der Fläche Ω angeschriebene volumsgleiche Quadriken, in jedem Berührbüschel vier.

Die *Fläche eines ebenen Schnittes* von Ω ist bestimmt durch

$$p = \alpha.\beta,$$

d. h., um die flächengleichen ebenen Schnitte zu erhalten, hat man zu setzen:

$$\frac{1}{\gamma} = 0,\ \lambda = 0,\ p = \frac{r^2}{s} = \frac{B^3}{C^2D}$$

und daraus folgt:

$$B^3 - p\ C^2D = 0. \tag{25}$$

Die Trägerebenen zueinander flächengleicher Kegelschnitte auf einer Mittelpunktsquadrik umhüllen eine Fläche 6. Klasse.

Faßt man alle *flächengleichen Durchmesserschnitte* ins Auge, so hat man aus dem Mittelpunkt der Fläche Ω an (25) den Tangentialkegel zu legen, dessen Fernkurve in den doppelt überdeckten Fernkegelschnitt der Fläche Ω und in eine Kurve 2. Klasse zerfällt, die ausgeschrieben lautet:

$$u^2(bc - p) + v^2(ac - p) + w^2(ab - p) = 0.$$

Für einen Durchmesserschnitt der Fläche Ω gilt nun

$$\alpha.\beta = abc\ .\ l^2, \tag{26}$$

wenn l der Abstand der zur Durchmesserebene parallelen Tangential-

ebene ist[6]. Andererseits gilt für die *Gauß'sche Krümmung* K eines Flächenpunktes[7]:

$$K = abc \,.\, l^4, \tag{27}$$

so daß man alle *Punkte gleicher Gauß'scher Krümmung* erhält, wenn man zu den flächengleichen Durchmesserschnitten von Ω die parallelen Tangentialebenen aufsucht. Ihre Berührpunkte liegen auf der Schnittkurve von Ω mit dem zu obiger Kurve 2. Klasse bezüglich Ω polaren Kegel

$$x^2a^2(bc - p) + y^2b^2(ac - p) + z^2c^2(ab - p) = 0,$$

wobei nach (26) und (27) gilt $p = \sqrt{Kabc}$.

Diese *Kurve 4. Ordnung* ist schon vielfach untersucht worden[8].

5. Eine spezielle Flächenklasse.

Gilt für die der Fläche Ω angeschriebenen Flächen Φ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0, \tag{28}$$

so ergibt sich $r = 0$, $s = 0$, d. h. dieser Sonderfall bedarf einer getrennten Darstellung. Der Ausdruck $-(1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma)$ stellt das Quadrat des Radius der Monge'schen Kugel dar[9]; diese Flächen sind geometrisch somit dadurch gekennzeichnet, daß ihre *Monge'sche Kugel eine Nullkugel* ist.

Zur Festlegung dieser Flächen verwenden wir die Größen

$$\begin{aligned} t &= \alpha + \beta + \gamma = \frac{(D - \lambda\tau).(B - \lambda\varrho)}{\lambda.(\lambda\varrho d - C)} \\ n &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(D - \lambda\tau)\,(\lambda\varrho d - C)^2}{(B - \lambda\varrho)^3}, \end{aligned} \tag{29}$$

wobei gilt:

[6] *O. Böklen*, Analytische Geometrie des Raumes. Cannstadt 1884 (2. Aufl.), 85.

[7] *G. Salmon — W. Fiedler*, Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1863, 120.

[8] Eine anschauliche, elementare Behandlung findet sich bei: *W. Wunderlich*, Überblick über die Krümmungsverhältnisse des Ellipsoides. Festschrift Eduard Doležal 1952, Verein f. Vermessungswesen (Wien), 673.

[9] *G. Salmon — W. Fiedler*, Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1863, 110.

$$s = \frac{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2}{(\alpha + \beta + \gamma)\,\alpha\beta\gamma} = 0: \quad \lambda = \frac{A}{\sigma}.$$

Die von den *Trägerebenen der Berührkegelschnitte* kongruenter Flächen umhüllte Torse ist dann

$$\begin{aligned} &t\,A(A\varrho - C\sigma) - (D\sigma - A\tau)\,(B\sigma - A\varrho) = 0 \\ &n\,(B\sigma - A\varrho)^3 - (D\sigma - A\tau)\,(A\varrho - C\sigma)^2 = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Drückt man diese Flächen zu *Kegelschnitten* zusammen, d. h. setzt man $1/\gamma = 0$, $\lambda = 0$, so zeigt (28), daß es sich um *gleichseitige Hyperbeln* handelt. Aus (30) wird dann

$$n\,B^3 - DC^2 = 0, \; A = 0, \tag{31}$$

d. h. *die Trägerebenen kongruenter gleichseitiger Hyperbeln bilden eine Torse 12. Klasse.*

Betrachtet man die ∞^2 zueinander *ähnlichen Flächen* Φ, welche die Bedingung (28) erfüllen, so gilt für sie $s = 0$ und $1/q = 0$, d. h. man muß statt q einen anderen in den Größen α, β, γ homogenen Ausdruck einführen, z. B.

$$m = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^3}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(D - \lambda\tau)^3}{\lambda^2\,(B - \lambda\varrho)} \tag{32}$$

und zusammen mit $\lambda = A/\sigma$ ergibt sich als *Hüllfläche der Berührebenen*

$$m\,A^2(B\sigma - A\varrho) - (D\sigma - A\tau)^3 = 0,$$

also eine *Fläche 6. Klasse.*

Für alle auf der Fläche liegenden *gleichseitigen Hyperbeln* muß gelten $\lambda = A/\sigma = 0$, d. h.:

Alle Ebenen eines Bündels, die aus einer Mittelpunktsquadrik gleichseitige Hyperbeln ausschneiden, bilden einen Kegel 2. Grades[10].

Frägt man nach allen ∞^2 angeschriebenen *Kegeln*, die (28) erfüllen, so gilt für diese außer $\lambda = A/\sigma$ noch $\lambda = C/\varrho$.

Die Berührebenen aller dieser Kegel umhüllen also eine Fläche 2. Klasse

$$C\sigma - A\varrho = 0.$$

Polarisiert man diese an Ω, so entsteht

$$x^2 + y^2 + z^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0,$$

[10] *K. Schober*, Über die Konstruktion der gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen 2. Grades. Mh. f. Math. u. Phys., VII. Jg. (1896), 111.

d. h.

Die Spitzen aller dieser Kegel liegen auf der Monge'schen Kugel der Grundfläche.

Dieses Ergebnis ist geometrisch unmittelbar einsichtig, da wegen (28) die der Fläche Ω umschriebenen Kegel $\Phi\ \infty^1$ orthogonale Tangentialebenentripel besitzen, die ja auch Ω umschrieben sind.

Sucht man alle zueinander *kongruenten Kegel* heraus, so kann man zu ihrer Festlegung die Größen verwenden

$$m\,A^2(B\sigma - A\varrho) - (D\sigma - A\tau)^3 = 0, \qquad s = 0,$$

und dies liefert für die *Torse der Berührebenen*

$$m\,A^2\varrho\sigma + (D\sigma - A\tau)^3 = 0,\ C\sigma - A\varrho = 0.$$

Die *Verbindungstorse* dieser beiden Flächen ist von 12. *Klasse*, d. h. *der Ort der Spitzen der angeschriebenen kongruenten Kegel ist eine sphärische Raumkurve 12. Ordnung.*

III. Mittelpunktsquadriken als Hüllflächen bewegter Paraboloide.

Zu Beginn der Überlegungen wurde vorausgesetzt, daß die der Fläche Ω angeschriebenen Flächen Φ Mittelpunktsflächen sind. Liegt jedoch ein *Paraboloid* vor, so muß gelten:

$$A_3 = \lambda^2.(B - \lambda\varrho) = 0,$$

d. h.

$$\lambda = B/\varrho. \tag{33}$$

Durch Verlagerung des Koordinatensystems kann man ein Paraboloid auf die Gestalt bringen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2z = 0, \tag{34}$$

wobei gilt[11]:

$$\alpha + \beta = A_1 \sqrt{-\frac{A_2}{A_4}}, \quad \alpha\beta = -\frac{A_2^2}{A_4}. \tag{35}$$

Zur Festlegung des Paraboloides wählen wir die Größen

$$s = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta},\ r = \alpha\beta. \tag{36}$$

Auf Grund dieser Formeln nehmen die *Grundgleichungen* die Gestalt an

[11] Vgl. [3] Die transformierte Flächengleichung enthält das lineare Glied $2\sqrt{-A_4/A_2}$, d. h. die Lösungen der charakteristischen Gleichung müssen durch $\sqrt{-A_4/A_2}$ dividiert werden, um α und β zu erhalten.

$$\begin{aligned} s\ B(A\varrho - B\sigma) - (B\tau - D\varrho)^2 &= 0 \\ r\ \varrho^2 B \qquad\quad - (A\varrho - B\sigma)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Untersucht man alle der Fläche Ω *angeschriebenen kongruenten Paraboloide*, so müssen die Größen r und s feste Werte annehmen; jede der Gleichungen (37) stellt eine Fläche 4. Klasse dar, die *Trägerebenen der Berührkegelschnitte* umhüllen daher eine *Torse 16. Klasse*.

Durch die *Transformation*

$$\xi = B\tau - D\varrho,\ \eta = A\varrho - B\sigma,\ \zeta = B \tag{38}$$

kann man das System dieser Torsen abbilden auf das System der Schnittkurven der Flächen

$$s\ \eta\zeta - \xi^2 = 0,\ r\varrho^2\zeta - \eta^2 = 0.$$

Die erste Gleichung stellt eine *Büschelschar von Kegeln 2. Grades* dar, die alle $\eta = 0$ in der ζ-Achse und $\zeta = 0$ in der η-Achse berühren, die zweite Gleichung *parabolische Zylinder*. Die *Schnittkurven* dieser Flächen sind von *4. Ordnung* und besitzen die Fernebene zur stationären Schmiegebene.

Läßt man die angeschriebenen Paraboloide zu auf der Fläche liegende *Parabeln* ausarten, so muß $1/\beta = 0$, $\lambda = B/\varrho = 0$ gelten. Um die Größe der Parabel festzulegen, führen wir das Quadrat ihres Parameters ein:

$$k = (1/\alpha)^2, \tag{39}$$

wofür man aus (36) errechnet:

$$k = -\,\frac{D^2\varrho}{A^3}.$$

Kongruente Parabelschnitte sind daher festgelegt durch

$$k\,A^3 + \varrho D^2 = 0,\ B = 0. \tag{40}$$

Die *Verbindungstorse* der beiden Flächen ist von *12. Klasse* und besitzt den *Asymptotenkegel* der Fläche Ω als *Richtkegel*.

Setzt man

$$\xi = D\varrho,\ \eta = A\varrho, \tag{41}$$

so wird das System dieser Torsen auf das System der Kurven 3. Ordnung

$$\eta^3 + \frac{\varrho^2}{k}\,\xi^2 = 0$$

abgebildet. Das sind *Neilsche Parabeln* mit gemeinsamer Spitze.

Beschränkt man sich auf zueinander *ähnliche Paraboloide*, so muß gelten

$$s\,B(A\varrho - B\sigma) - (B\tau - D\varrho)^2 = 0. \tag{42}$$

Die ∞^2 *Trägerebenen der Berührkegelschnitte* umhüllen eine *Fläche 4. Klasse.*

Umschreibt man der Fläche Ω *gleichseitige hyperbolische Paraboloide*, d. h. Flächen, für die gilt:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 0, \tag{43}$$

so ergibt sich für diese aus (33) und (37)

$$B\tau - D\varrho = 0.$$

Die zugehörigen *Berührebenen umhüllen eine Fläche 2. Klasse*, die in einen Fernkegelschnitt ausgeartet ist.

Sucht man durch Angabe der Größe r aus diesen *kongruente gleichseitige Paraboloide* heraus, so folgt für diese

$$r\,B\varrho^2 + (A\varrho - B\sigma)^2 = 0,\ B\tau - D\varrho = 0,$$

d. h. die *Berührebenen* umhüllen eine *Torse 8. Klasse.*

IV. Paraboloide als Hüllflächen bewegter Quadriken.

Legt man als Ausgangsfläche Ω das Paraboloid

$$ax^2 + by^2 + 2z = 0 \tag{44}$$

zugrunde, so gehen die Untersuchungen in *analoger Weise* vor sich und sollen daher nur angedeutet werden. Die Ebene (2) bestimmt mit (44) eine *Büschelschar* von Quadriken Φ

$$\begin{aligned} x^2(u^2 - \lambda a) + y^2(v^2 - \lambda b) + z^2w^2 + 2uvxy + 2uwxz + 2vwyz + \\ + 2ux + 2vy + 2z(w - \lambda) + 1 = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

wobei (44) i. a. das einzige enthaltene Paraboloid ist. Jede dieser Mittelpunktsflächen kann durch Verlagerung des Koordinatensystems auf die Gestalt gebracht werden.:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0, \tag{46}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= u^2 + v^2 + w^2 - \lambda(a + b) \\ A_2 &= -\lambda[u^2 b + v^2 a + w^2(a + b)] + \lambda^2 ab \\ A_3 &= \lambda^2 w^2 ab \\ A_4 &= \lambda^3(u^2 b + v^2 a + 2wab) - \lambda^4 ab. \end{aligned} \tag{47}$$

Wählen wir wieder die durch die Gleichungen (8) eingeführten Größen zur Festlegung der Fläche Φ, so ergibt sich nach Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} A &= a^2 b + v^2 a + w^2(a + b) \\ B &= w^2 ab \\ C &= u^2 b + v^2 a + 2wab \\ D &= a^2 + v^2 + w^2 \\ \varrho &= ab \\ \tau &= a + b \end{aligned} \tag{48}$$

für die Größen r, s, t

$$\begin{aligned} r &= \frac{(\lambda\varrho - A).B}{(D - \lambda\tau).(C - \lambda\varrho)} \\ s &= \frac{(\lambda\varrho - A)^2}{(D - \lambda\tau).B} \\ t &= \frac{(D - \lambda\tau).B}{\lambda(C - \lambda\varrho)} \end{aligned} \tag{49}$$

oder

$$\begin{gathered} \lambda^2\varrho\tau r - \lambda[r(C\tau + D\varrho) + B\varrho] + (rCD + AB) = 0 \\ \lambda^2\varrho + \lambda(s\tau B - 2\varrho A) + (A^2 - s BD) = 0 \\ \lambda^2\varrho t - \lambda(tC + \tau B) + BD = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Dies sind die *Grundgleichungen*, die an Stelle von (11) treten.

Die Trägerebenen *kongruenter ebener Schnitte* des Paraboloides Ω bilden die Verbindungstorse von

$$r\,CD + AB = 0,\ s\,BD - A^2 = 0, \tag{51}$$

also wieder eine *Torse 12. Klasse*, da sich die *vier Minimalebenenbüschel* $A = D = 0$ abspalten.

Beschränkt man sich auf die dem Paraboloid angeschriebenen *ähnlichen Quadriken* Φ, so muß für diese gelten

$$q = \frac{(D - \lambda\tau)^2}{\lambda.(\lambda\varrho - A)},\ s = \frac{(\lambda\varrho - A)^2}{B.(D - \lambda\tau)}. \tag{52}$$

Ähnliche Kegelschnitte auf der Fläche Ω sind dann durch

$$s\,BD - A^2 = 0$$

ausgezeichnet. Diese Fernkurve 4. Klasse besitzt die Ferngeraden des Paraboloides

$$u^2b + v^2a = 0,\ w = 0$$

zu Doppeltangenten, d. h. diese Kurve ist von 8. Klasse.

Alle Ebenen eines Bündels, die aus einem Paraboloid ähnliche Kegelschnitte ausschneiden, bilden einen Kegel 4. Klasse, 8. Ordnung.

Die angeschriebene Quadrik Φ ist nach (47) dann ein *Paraboloid*, wenn gilt $w = 0$, d. h. die Trägerebenen der Berührkegelschnitte sind dann achsenparallel. Errechnet man in diesem Sonderfall nach (35) und (36) die *Grundgleichungen*, so erhält man

$$\begin{gathered}\lambda(ab - r) - (u^2b + v^2a) = 0\\ \lambda^2[(a+b)^2 - sab] - \lambda[2(a+b)(u^2+v^2) - s(u^2b + v^2a)] + \\ + (u^2+v^2)^2 = 0\end{gathered} \tag{53}$$

und nach Elimination von λ:

$$\frac{a+b-\sqrt{sr}}{ab-r} = \frac{a+b\,u^2/v^2}{1+u^2/v^2}.$$

Kongruente Paraboloide Φ berühren Ω somit längs Parabeln, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.

Kongruente Parabeln auf der Fläche erhält man für $1/\beta = 0$, $\lambda = 0$, wobei die Größe der Parabel nach (38) festgelegt wird durch

$$k = (1/a)^2. \tag{39}$$

Aus (53) erhält man

$$\sqrt{k} = \frac{1 + u^2/v^2}{a + bu^2/v^2}.$$

Diese Gleichung drückt die bekannte Tatsache aus, daß *jedes Paraboloid als Schiebfläche einer Parabel erzeugbar* ist.

Buchbesprechungen.

Ulisse Dini, Opere. Vol. II. Herausgegeben von der Unione Matematica Italiana unter Mitwirkung des Consiglio Nazionale delle Ricerche. 509 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1954.

Der zweite Band der Werke von *Dini* ist nun ebenfalls erschienen. Es ist wohl überflüssig zu betonen, wie nützlich es ist, alle Werke eines der Väter der exakten Methoden in der Analysis geschlossen zur Verfügung zu haben. Der vorliegende Band enthält Abhandlungen über nirgends differenzierbare Funktionen, Konvergenzuntersuchungen über Kugelfunktionenreihen, gewisse nach Jacobi'schen Funktionen fortschreitende Reihen, verschiedene Probleme der Potentialtheorie (insbesondere über das Dirichlet'sche und das Neumann'sche Problem) und der komplexen Funktionentheorie. Ein allgemeines Vorwort von *G. Sansone* und spezielle Einleitungen von *F. Cecioni*, *M. Picone*, *G. Sansone* und *G. Scorza Dragoni* geben historische Hinweise und Würdigung der einzelnen Abhandlungen. Viele werden aus den Werken *Dini*'s neue Anregungen erhalten und viele werden mit großem Interesse Werke lesen, welche aus der Zeit stammen, in der die moderne Analysis im Entstehen war. *K. Prachar*, Wien

Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Von *O. Becker* (Orbis Academicus, Problemgeschichten der Wissenschaft in Dokumenten und Darstellungen). Mit 62 Textabb., XI, 422 S. Freiburg-München: K. Alber. 1954. DM 26.—.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, diejenigen Epochen der Mathematik darzustellen, welche die begrifflichen Grundlagen dieser Wissenschaft entscheidend beeinflußt haben. Dies führt ihn dazu, sich im wesentlichen mit drei Zeitabschnitten zu beschäftigen: Antike Mathematik, 17. Jahrhundert (Erfindung der Infinitesimalrechnung) und das 19. und 20. Jahrhundert (Moderne Grundlagenforschung). Nach einer kurzen Vorschau auf die mathematischen Leistungen der Babylonier und Ägypter, die wie wir heute mit Sicherheit sagen können, den Griechen das „Rohmaterial" zum Aufbau der mathematischen Wissenschaft geliefert haben, folgt eine ausführliche Darstellung der griechischen Mathematik, meist auf umfangreiche Originalzitate gestützt. Dieser Vorgang wird auch späterhin beibehalten und muß als einer der Hauptvorzüge der Darstellung angesehen werden. Naturgemäß gruppiert sich die Behandlung der antiken Mathematik um drei Pfeiler: Euklids Elemente, die Proportionenlehre und die Mathematik des Archimedes.

Der nächste Abschnitt setzt mit einem Hinweis auf die hochmittelalterlichen und späteren Vorläufer der Infinitesimalrechnung und die Erfindung der analytischen Geometrie durch *Descartes* ein und gipfelt in der Entdeckung des „Calculus" durch *Newton* und *Leibniz*.

Die Einführung in die kritischen Untersuchungen des 19. Jahrhunderts erfolgt durch einen Überblick über die Entwicklung der euklidischen Geometrie.

insbesondere des Parallelenaxiomes und durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch *Bolyai*, *Gauß* und *Lobatschefskij*. Zum Abschluß ist *Hilberts* Axiomensystem in Kürze dargestellt. In den Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis kommen neben *Hankel*, *Du-Bois-Reymond* und *Bolzano* vor allem *Dedekind* und *Cantor* zu Wort. Stiefmütterlich sind wohl die Ideen von *Cauchy* und *Weierstraß* behandelt. Allerdings muß man sich vor Augen halten, daß gerade die Paradoxien der Cantor'schen Mengenlehre die Haupttriebfeder für die moderenen Grundlagenforschungen waren, welche wohl das wesentlichste Ziel der Darstellung sind. Neben einer durch eine geschickte Auswahl von Originalzitaten bewerkstelligten klaren Beschreibung der Situation in den drei Hauptrichtungen der modernen Grundlagenuntersuchungen kommt der Verf. z. B. bis zur Deutung der intuitionistischen Logik als Aufgabenlogik durch *Kolmogoroff*, zum Widerspruchsfreiheitsbeweis in der Zahlentheorie durch *Gentzen* und in der gestuften Analysis durch *Lorenzen*.

Alles in allem entledigt sich der Autor seiner schwierigen Aufgabe mit hervorragender Sachkenntnis. Man hätte vielleicht einen etwas ausführlicheren Hinweis auf die indische Mathematik (Erfindung der Null) und auf die arabische Mathematik (Algebra ist bekanntlich ein arabisches Wort) gerne gesehen, wie überhaupt Zahlentheorie und Algebra etwas zu kurz kommen. Wenn es dem Mathematiker scheint, als ob dafür die Wiedergabe der Stellungnahme einer Reihe von Philosophen (*Kant*, *Husserl*, *Dingler*) unterbleiben hätte können, darf nicht vergessen werden, daß sich das Buch an einen breiten — auch fachphilosophisch interessierten — Leserkreis wendet. Wie dem auch sei, wir stellen nochmals fest: Ein ausgezeichnetes Buch!

L. Schmetterer, Wien

Solvable Cases of the Decision Problem. Von *W. Ackermann*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 114 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1954. fl 12.—.

Da die Untersuchungen von *Gödel*, *Church* und *Turing* aufgezeigt haben, daß eine allgemeine Lösung des Entscheidungsproblemes für den Prädikatenkalkül nicht möglich ist, konzentrieren sich die Bemühungen der Forscher heute vornehmlich darauf, möglichst umfangreiche Teilklassen aufzusuchen, welche eine Lösung des Entscheidungsproblemes gestatten. Der Verf. wählt die semantische Fassung des Problemes und grenzt drei Formen desselben ab: 1. Zu entscheiden, ob eine Formel in jedem Bereich, d. h. universell gültig ist; 2. wenn sie nicht universell ist, zu entscheiden, ob es mindestens einen Gültigkeitsbereich gibt oder nicht und 3. zu entscheiden, ob eine Formel in allen Bereichen mit endlicher Kardinalzahl gültig ist oder nicht. Der Verf. verarbeitet viel neues Gedankengut. Bemerkenswert ist, daß er die meisten Entscheidbarkeitsuntersuchungen so wendet, daß sie auch für den erweiterten Kalkül gelten, indem auch das Gleichheitszeichen auftritt. Die ersten vorbereitenden Kapitel ermöglichen es, an die weitere Lektüre fast ohne Vorkenntnisse heranzugehen. Die folgenden Kapitel lösen das Entscheidungsproblem für den Kalkül ohne Prädiktenvariable und mit einstelligen Prädikaten, Ergebnisse, die im Prinzip schon auf *Löwenheim* zurückgehen. Das nächste Kapitel ist allgemeinen Untersuchungen über die Gültigkeit von Formeln im Prädikatenkalkül erster Stufe gewidmet, entwickelt die Normalform von *Skolem* und enthält den wichtigen Satz, daß jede Formel des Kalküls (ohne Identität) universell gültig ist, wenn sie in einem abzählbaren Bereich gilt, was auch schon auf *Löwenheim* zurückgeht. Der Verf. erweitert diese Untersuchungen auf den Kalkül mit Gleichheitszeichen. Die beiden folgenden Kapitel betrachten Spezialfälle des Entscheidungsproblems für Formeln

mit speziell gebauten Präfixen, Untersuchungen, die auf *Bernays*, *Kalmar*, den Verf. u. a. zurückgehen. Schließlich werden weitere Sonderfälle angeführt, in denen die Matrix der Formel eingeschränkt ist. Gestützt auf Ideen von *Gödel* und *Schütte* zeigt der Verf. das Herbrand'sche Theorem. Das letzte Kapitel behandelt das Entscheidungsproblem, wenn man an Stelle des Prädikatenkalküls einen Funktionenkalkül betrachtet.

Es erübrigt sich bei einem Verf., der zu den engsten Mitarbeitern Hilberts in der Grundlagenforschung gehört hat, darauf hinzuweisen, daß die Lektüre dieses klar und anziehend geschriebenen Buches, jedem der in diesem Gebiet interessiert ist, eindringlich empfohlen werden muß. *L. Schmetterer*, Wien

Einführung in die Algebra. Von *O. Haupt*. Zweite Auflage. Zweiter Teil. („Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik". Begründet von E. Hilb. Herausgegeben von A. Kratzer und E. Hölder: Reihe A, Band 5.) Mit 1 Textabb., XVI, S. 371—673. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1954. DM 19.35.

Der zweite Band enthält die numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen, algebraische Erweiterungen, Auflösung durch Radikale und Galoissche Theorie. Die erste Auflage wurde ausführlich von *T. Rella* in Mh. Math. **36**, 16 (1929) besprochen. An der Tendenz, ein verständliches Lehrbuch für Studierende unter Benutzung der abstrakten Methoden zu sein, wurde nichts geändert. Gegenüber der ersten Auflage wurden nur an mehreren Stellen kleine Verbesserungen und Ergänzungen vorgenommen. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die Gruppentheorie. Von *P. S. Alexandroff*. Zweite Auflage. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band II.) VII, 120 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Dies ist eine Einführung in die Gruppentheorie, die dank der breiten und leichtverständlichen Darstellung für Studierende sehr geeignet ist. Die Begriffe werden meist an geometrischen Beispielen erläutert. Das Buch enthält die Begriffe: Gruppe, Untergruppe, Normalteiler und ihre einfachsten Eigenschaften, es bringt Permutationsgruppen und zyklische Gruppen, schildert ausführlich die einfachsten Bewegungsgruppen, erklärt die isomorphen und homomorphen Abbildungen und schließt mit dem Homomorphiesatz. Bei der Zusammensetzung der Gruppenelemente wird die additive Schreibweise bevorzugt.

N. Hofreiter, Wien

Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen. Von *A. O. Gelfond*. (Mathematische Einzelschriften: Band 2.) 60 S. München: Verlag Oldenbourg. 1954. DM 7.80.

Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen). Von *A. O. Gelfond*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band V.) 60 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Das Buch stellt eine Wiedergabe von Vorträgen dar, die der Verfasser im Jahre 1951 auf der mathematischen Olympiade in der Moskauer Staatlichen Universität gehalten hat. Da sich diese Vorträge an einen weiten Kreis von Zuhörern wandten, sind sie verhältnismäßig elementar gehalten. Das Büchlein ist sogar schon für Mittelschüler der höheren Klassen gedacht. Das Buch behandelt die Auflösung von Diophantischen Gleichungen, also die Ermittlung

ganzzahliger Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Ausführlich werden lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten behandelt. Dabei werden die benötigten Hilfsmittel über Kettenbrüche entwickelt. Ebenfalls mit Hilfe von Kettenbrüchen wird die Pell'sche Gleichung $x^2 - A y^2 = 1$ gelöst. Zwei Paragraphen bringen die Fermat'schen Gleichungen $x^2 + y^2 = z^2$ und $x^4 + y^4 = z^4$. Über die Approximation von algebraischen Zahlen, insb. über die Sätze von *Thue* wird referiert. Das Buch ist ob seiner klaren und ausführlichen Darstellung allen zu empfehlen, die eine kurze, gediegene Einführung in die Theorie der diophantischen Gleichungen erhalten wollen. Die in den zwei Verlagen erschienenen Bücher unterscheiden sich im Text nur ganz unwesentlich, am meisten noch in den Fußnoten. *N. Hofreiter*, Wien

Die Lehre von den Kettenbrüchen. Von *O. Perron*. Band I. Elementare Kettenbrüche. Dritte Auflage. VI, 194 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1954. DM 29.40.

Die erste Auflage wurde von *H. Tietze* ausführlich in dieser Zeitschrift Mh. Math. **25**, 57 (1914) rezensiert. Die zweite Auflage brachte nur wenige Änderungen und wurde von *H. Hahn* in Mh. Math. **38**, 9 (1931) besprochen. Nun erschien — 42 Jahre nach der ersten Auflage — die dritte Auflage. Sie erscheint diesmal getrennt in zwei Teilen. Infolge der wissenschaftlichen Fortschritte wurde es notwendig, das Buch zu überarbeiten. Der alte Rahmen konnte beibehalten werden, auch die meisten Überschriften wurden nicht geändert, wohl aber hat sich im Text vieles geändert. Es ist damit wieder ein Werk entstanden, das auf der Höhe der Forschung steht und nach wie vor das Standardwerk über Kettenbrüche geblieben ist. An größeren Änderungen erwähne ich die gelegentliche Verwendung von zweireihigen Matrizen, insbesondere bei den Hurwitzschen Kettenbrüchen; ferner sind neu die Untersuchungen über längste und kürzeste Entwicklungen bei den halbregelmäßigen Kettenbrüchen und ein Paragraph über Kettenbrüche in imaginär-quadratischen Zahlkörpern. In der Art der Darstellung hat sich zum Glück nichts geändert, denn eine bessere gibt es sicher nicht. Der zweite Teil (analytisch-funktionentheoretisch) soll bald neu herauskommen. *N. Hofreiter*, Wien

Geometrie der Zahlen. Von *O. H. Keller*. Zweite, völlig neubearbeiteteAuflage. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Band I/2, Heft 11, Teil III.) Mit 12 Textabb., 84 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft in Verwaltung. 1954. DM 8.80.

Das Heft beginnt mit der Minkowski'schen Geometrie, den zugehörigen Hauptsätzen und Verallgemeinerungen. Dann werden Sternkörper betrachtet, über die in den letzten 15 Jahren viel geschrieben wurde. Unter den Linearformen wird natürlich der Minkowski'sche Linearformensatz und sein Grenzfall gebracht. Es folgt ein Abschnitt über Minima von definiten und indefiniten quadratischen Formen. (Die auf Seite 36 angegebenen Werte für γ_9 und γ_{10} sind noch nicht bewiesen). Dann kommen Potenzsummen und Produkte von homogenen und inhomogenen Linearformen. Es folgen Abschnitte über definite quadratische Formen, über Kettenbrüche, ferner Anwendungen der Geometrie der Zahlen auf algebraische Zahlentheorie. (In $K(\sqrt{97})$ gilt der euklidische Algorithmus nicht, siehe Seite 70). Das Heft schließt mit den Untersuchungen von *H. Tietze* über Partitionen und Gitterpunktfiguren. Das Heft gibt eine gute Übersicht über die Probleme und Ergebnisse der Geometrie der Zahlen. Natürlich konnte fast nur referiert werden. *N. Hofreiter*, Wien

The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Von *I. M. Vinogradoff*. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von *K. F. Roth* und *Anne Davenport*. X, 180 S. London-New York: Interscience Publishers. 1954. $ 5.50.

Das russische Original des vorliegenden Buches ist eines der berühmtesten Werke der mathematischen Literatur. Wurde doch in seiner ersten Auflage 1937 der erste ausführlichere Beweis für die *Goldbach*'sche Vermutung über ungerade Zahlen gegeben, nachdem es dem Verfasser kurz vorher gelungen war, dieses Problem zu lösen. Das Problem besteht darin, zu beweisen, daß sich jede genügend große ungerade Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen schreiben läßt und seit Jahrhunderten hatten sich die besten Mathematiker vergeblich bemüht, dieses Problem zu lösen. Das analoge Problem für gerade Zahlen und zwei Primzahlen ist bis heute noch nicht vollständig gelöst. *Hardy* und *Littlewood* hatten 1923 eine Methode geschaffen, mit der sie das Problem angreifen konnten, jedoch konnten sie den *Goldbach*'schen Satz nur unter einer Hypothese über *Dirichlet*'sche L-Funktionen beweisen, welche ihrerseits bis heute noch nicht bewiesen werden konnte. Mit Hilfe eines inzwischen von *Siegel* gefundenen Resultates und mit Hilfe seiner eigenen neuen Methoden zur Abschätzung trigonometrischer Summen mit Primzahlen konnte dann *Vinogradoff* den *Goldbach*-schen Satz für ungerade Zahlen beweisen. Aber nicht nur für dieses Problem, sondern auch für eine Reihe von anderen Problemen der analytischen Zahlentheorie sind die Methoden von *Vinogradoff* ungeheuer fruchtbar gewesen.

Der vorliegenden Übersetzung und Bearbeitung ist die zweite Auflage des russischen Originals von 1947 zugrundegelegt. Nach einer ausführlichen und sehr instruktiven Einleitung bringt das erste Kapitel verschiedene grundlegende Hilfssätze. Dann folgt die Behandlung der „singular series", welche beim Waring-schen Problem auftritt und die Behandlung der „major arcs" im Waring'schen Problem. Damit wird dann das bekannte *Vinogradoff*'sche Ergebnis gewonnen, welches besagt, daß die Anzahl der n-ten Potenzen, mit denen man jede genügend große ganze Zahl additiv darstellen kann, von der Größenordnung $< c\, n \log n$ ist (für großes n); vorher war nur $< c\, n\, 2^n$ bekannt. Kap. 5 behandelt Fragen der Approximation von Irrationalzahlen durch die Werte eines Polynomes mit reellen Koeffizienten für ganzzahlige Werte der Variablen. Dabei spielen gewisse trigonometrische Summen, welche zuerst von *H. Weyl* für diesen Zweck eingeführt wurden, eine große Rolle. Eine möglichst gute Abschätzung von Summen dieser Art gibt Kap. 6. Durch eine Reihe von äußerst scharfsinnigen Verfeinerungen wird hier die (im wesentlichen) beste bisher bekannte Abschätzung erhalten. Hierauf folgt die asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen einer großen natürlichen Zahl durch r n-te Potenzen, deren Gültigkeit für $r > c\, n^2 \log n$ bewiesen wird. In Kap. 8 werden die Resultate über Weyl'sche Summen zur Behandlung des Restgliedes bei der Gleichverteilung verwendet. Kap. 9 u. 10 bringen das *Goldbach*'sche Problem; dabei wird für die „major arcs" nicht der Satz von *Siegel*, sondern ein früheres Resultat von *Page* verwendet. Das letzte Kapitel bringt eine Anwendung von Abschätzungen aus Kap. 9 auf die Gleichverteilung der Werte eines Polynoms, wenn die Variable Primzahlen durchläuft.

Abgesehen davon, daß das russische Original nicht leicht zugänglich ist, ist es an vielen Stellen schwer lesbar, da es oft mit einer gewissen Großzügigkeit verfaßt ist. Es war eine sehr große Mühe, die Darstellung zu glätten und auch von Unstimmigkeiten zu befreien. Außerdem hat *K. F. Roth* ausgezeichnete Kommentare zu den einzelnen Kapiteln verfaßt. Möge das äußerst wertvolle

Buch dazu beitragen, daß eines der interessantesten Gebiete der Mathematik eine weitere Verbreitung findet als bisher. *K. Prachar*, Wien

Die Methode der vollständigen Induktion. Von *I. S. Sominski.* Zweite Auflage. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band III.) 55 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Das kleine Buch bringt ausführlich die Methode der vollständigen Induktion und erläutert diese Methode an einer großen Anzahl bon Beispielen. Das Heft ist Anfängern, ja sogar schon den Schülern der obersten Klassen zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Ungleichungen. Von *P. P. Korowkin.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathenatik: Band IV.) 56 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Das Heft bringt eine große Anzahl von Ungleichungen, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine Rolle spielen: z. B. die Beziehung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel, die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, die Höldersche' Ungleichung u. a. Es wird alles in Form von Aufgaben gebracht. Diese werden zum Teil ausführlich gelöst. Zu den übrigen Aufgaben werden die Lösungen angegeben. Rechnen mit Ungleichungen macht den Anfängern große Schwierigkeit. Daher ist diesen ein Durcharbeiten des Heftes sehr anzuraten. *N. Hofreiter*, Wien

Entire Functions. Von *R. Ph. Boas.* („Pure and Applied Mathematics". A Series of Monographs and Textbooks. Herausgegeben von P. A. Smith und S. Eilenberg: Band V.) XI, 276 S. New York: Academic Press Inc. 1954. Geb. $ 6.—.

Das Buch bietet eine große Anzahl von Einzeluntersuchungen über ganze Funktionen, deren Auswahl naturgemäß etwas willkürlich sein muß. Besonders werden die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus behandelt, während etwa der Problemkreis um den Picard'schen Satz fehlt. Die Darstellung ist klar und sorgfältig. *H. Hornich*, Graz

Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Von *I. G. Petrowski.* Mit 27 Textabb., 198 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft in Verwaltung. 1954. DM 7.80.

Das bekannte Lehrbuch von *Petrowski*, das bisher nur in russischer Sprache zugänglich war, ist nun erfreulicherweise auf Grund der vierten russischen Auflage ins Deutsche übertragen worden. Das Buch ist im Vergleich zu seinem Umfang außerordentlich inhaltsreich. Zwar werden die einfachsten Typen elementar integrierbarer gewöhnlicher Differentialgleichungen und die implizite Differentialgleichung nur kurz behandelt. Sorgfältig werden jedoch die allgemeinen Existenz- (*Peano*) und Eindeutigkeitssätze (*Osgood*) zunächst für eine Differentialgleichung dargestellt. Der Grundgedanke des Beweises von *Picard-Lindelöf* wird besonders klar und allgemein herausgearbeitet. Über singuläre Punkte und Kurven einer Differentialgleichung erfährt man ebenfalls das Wichtigste. Die erwähnten Existenz- und Eindeutigkeitssätze werden dann auf Systeme übertragen. Die allgemeine Theorie der linearen Systeme wird mit einem Satz

von *Tschaplygin* über Differentialungleichungen beschlossen. Für die Theorie der Systeme mit konstanten Koeffizienten wird die Elementarteilertheorie herangezogen, welche in hinreichendem Umfange im Buch entwickelt wird. Dann wird ein allgemeiner Satz über die Stabilität einer Lösung von Systemen nach *Ljapunow* bewiesen. Ein Anhang ist den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet, und zwar wird das Cauchy'sche Problem für die fast- und quasilineare Gleichung betrachtet, dann auch für allgemeine nichtlineare Gleichungen. Den Abschluß bildet eine kurze Behandlung der Pfaffschen Differentialgleichung. Das Buch enthält viele Übungsaufgaben, deren Zweck vielfach in der Ergänzung und Abrundung der Darstellung liegt. Man wird das Lehrbuch gerne einem Studenten in die Hand geben.

L. Schmetterer, Wien

Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Von *J. Meixner* und *F. W. Schäfke*. („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete": Bd. LXXI.) Mit 29 Textabb., XII, 414 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM. 49.—, geb. DM 52.60.

Die Mathieuschen und Sphäroidfunktionen treten bei der Separation der Schwingungsgleichung in elliptischen Zylinderkoordinaten bzw. in rotationselliptischen Koordinaten auf und ihre eingehende Untersuchung ist für eine genaue Beschreibung zahlreicher Naturvorgänge von großer Bedeutung. Abgesehen davon ist die Theorie dieser Funktionen auch für den Mathematiker von größtem Interesse.

In dem vorliegenden Werk wird eine sehr gründliche Darstellung dieser Theorie geboten. Im ersten Kapitel werden als Grundlage Sätze bereitgestellt, die nicht nur in der Theorie der Mathieuschen und Sphäroidfunktionen gebraucht werden, sondern auch von allgemeinem Interesse sind. Es finden sich hier: Die Separation der Schwingungsgleichung und die Operationen der Vektoranalysis in dreifach orthogonalen Koordinatensystemen, eine Einführung in die Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung und dann ausführlich die Eigenwertprobleme mit zwei Parametern, wobei auf möglichste Allgemeinheit Wert gelegt wurde. Das zweite Kapitel ist den Mathieu'schen Funktionen gewidmet. Sie werden durch die Mathieu'sche Differentialgleichung definiert. Von grundlegender Wichtigkeit sind die sogenannten Floquet'schen Lösungen, das sind solche, die sich mit einem konstanten Faktor multiplizieren, wenn man das Argument um π vergrößert. Die in Frage kommenden Faktoren genügen einer transzendenten Gleichung, welche genau untersucht werden muß. Für die verschiedenen Arten der Mathieu'schen Funktionen werden nun Entwicklungssätze, asymptotische Formeln für verschiedene Bereiche der Parameter, Additionstheorem, Entwicklungen nach Zylinderfunktionen, Integraldarstellungen, Integrale über Mathieu'sche Funktionen, Nullstellen „Stabilitätskarte" (sie erlaubt abzulesen, für welche Werte der Parameter beschränkte Lösungen der Differentialgleichung existieren) usw. untersucht. Ähnliches geschieht im dritten Kapitel für die Sphäroidfunktionen, deren Theorie ebenfalls heute schon sehr ausgedehnt ist. Das letzte Kapitel ist den Anwendungen gewidmet, auf welche besondere Sorgfalt verwendet wurde. Von den zahlreichen schönen Anwendungen sollen hier nur folgende erwähnt werden: Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt, Saite mit periodischer Massenverteilung, Hohlraumresonator mit Wandabsorption, Hohlleiter von elliptischem Querschnitt, Rotationsellipsoidische

Antennen, Beugungsprobleme und einige wellenmechanische Probleme. Am Ende jedes Kapitels finden sich zahlreiche Ergänzungen, in denen ohne Beweise Formeln zusammengestellt sind, ferner Hinweise auf numerische Berechnungen und Tafelwerke, sowie auf die übrige Literatur, welche sehr sorgfältig zusammengestellt wurde.

Nicht zuletzt durch originelle Beiträge der Autoren ist hier ein Standardwerk geschaffen worden, welches für Naturwissenschaftler und Techniker ein unentbehrlicher Ratgeber sein wird, während der Mathematiker auch viel für ihn an sich Interessantes finden wird. *K. Prachar*, Wien

The Foundations of Statistics. Von *L. J. Savage*. XV, 294 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1954. $ 6.—.

Beeinflußt durch *Wald*'s Entscheidungstheorie und durch die neueren Ideen über den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff, insbesondere durch die Arbeiten von *de Finette*, entwickelt der Verf. eine Entscheidungstheorie, die eng verknüpft ist mit einer „personalistischen" Wahrscheinlichkeitsauffassung: „a highly idealized theory of the behavior of a „rational" person", die als einheitliche Grundlage für die Schlußweisen der Statistik dienen soll. Es dürfte kein Zufall sein, daß die neueren Versuche den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff in seiner logischen Struktur zu erfassen (*Jeffreys*, *Good*, *Carnap* u. a.) fast ausschließlich anglo-amerikanischer Herkunft sind, sondern letztlich mit den dort besonders geübten Anwendungen statistisch-wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur, z. B. auf Psychologie und Ökonomie zusammenhängen. — Der Verf. definiert einen Akt (einer handelnden Person) als Abbildung von Zuständen der Außenwelt in die Menge der sich auf Grund diesbezüglicher Entscheidungen ergebenden Konsequenzen. Die Akte werden als vergleichbar angesehen und einer Reihe weiterer axiomatischer Forderungen unterworfen. Diese Begriffsbildungen ermöglichen es, ein System personalistischer Wahrscheinlichkeit aufzubauen, das qualitativ und quantitativ gefaßt wird. Diese Fassung benützt im wesentlichen den üblichen Kalkül, der sich auf eine additive nichtnegative Mengenfunktion stützt. Die Relation zwischen dem qualitativen und quantitativen Konzept wird genauer untersucht. Als wichtige Begriffsbildung führt der Verf. im Zusammenhang mit dem Spielbegriff eine Nutzenfunktion ein, zunächst als Abbildung einer endlichen Menge von Konsequenzen in die Menge der reellen Zahlen, so daß die Abbildung der Akte auf den Erwartungswert der zugehörigen Nutzenfunktion ordnungstreu ist. Es folgt im Anschluß an *von Neumann* und *Morgenstern* der wichtige Nachweis, daß eine Nutzenfunktion existiert und dann wird der Begriff auf allgemeinere Akte erweitert. Die Einführung der Nutzenfunktion gestattet es, einen Akt als zufällige Variable aufzufassen, deren Ordnung durch die gewöhnliche Ordnungsbeziehung zwischen den Erwartungswerten gegeben ist. Nun gibt der Verf. von seinem Standpunkt eine Einführung in die Theorien von *Fisher*, *Neyman-Pearson* und *Wald* (Parameterschätzungen, Testen von Hypothesen, Minimaxtheorie). Ohne Zweifel sind die Untersuchungen des Autors mathematisch von Interesse und werden von einem Statistiker mit einschlägigen Kenntnissen mit Gewinn gelesen werden. *L. Schmetterer*, Wien

Sample Survey Methods and Theory. Von *M. H. Hansen*, *W. N. Hurwitz* und *W. G. Madow*. Band I: XXII, 638 S. — Band II: XII, 332 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1953. $ 7.—.

Die beiden Bände behandeln die Stichprobentheorie für das Gebiet der Sozial- und Verwaltungsstatistik, jedoch mit einer Gründlichkeit, die einzigartig sein dürfte. Der erste und zweite Band stellen ein Ganzes dar, sind jedoch so geschickt angelegt, daß ein Statistiker, den nur die Methoden und ihre praktische Anwendung interessieren, aber nicht ihre mathematischen Grundlagen, auf die Lektüre des zweiten Bandes verzichten kann. Anderseits kann man auch den zweiten Band unabhängig vom ersten trotz der vielen Rückverweisungen durcharbeiten, die jenen mit diesem verbinden. Die Verf., welche selbst wichtige Beiträge zur Theorie und Praxis der Stichprobenverfahren, insbesondere aus endlichen Grundgesamtheiten und für systematische Auswahlen gegeben haben, behandeln wohl alle gebräuchlichen Methoden. Zufällige Stichproben, geschichtete Stichproben, Klimpenauswahl, mehrstufige Stichproben, systematische Auswahlen mit allen möglichen Varianten, lateinische Quadrate; Zeitreihen werden ebenso betrachtet wie die unmittelbar auf die Praxis zielenden Fragen der Nichtbeantwortung, des Interviews usw. Der erste Band enthält auch eine Reihe vollständig durchgearbeiteter Beispiele. Für das Verständnis des zweiten Bandes ist nur ein Minimum an Vorkenntnissen erforderlich. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen, beschränkt auf diskrete Verteilungen mit endlich vielen Massenpunkten, werden in leicht verständlicher Weise im Buch selbst entwickelt. Gelegentlich (z. B. bei den Untersuchungen über Erwartungswerte und Streuungen von Quotienten zufälliger Variabler) sollten vielleicht die formalen Gültigkeitsbedingungen noch mehr betont werden, als es geschehen ist. Für den modernen Statistiker, vor allem, wenn er auf dem Gebiet der Wirtschafts- und Sozialstatistik arbeitet, sind die beiden Bände unentbehrlich. Es dürfte kaum eine praktische oder theoretische Frage geben, die sich hier nicht beantwortet findet.

L. Schmetterer, Wien

Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen. Von *F. Lösch*. VIII, 335 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. Geb. DM 49.80.

Diese Tafeln schließen an die von *Hayashi* an. Es sind Tafeln für die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cof}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$, $ln\, x$, e^x, e^{-x}, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, x$. Die Stellenzahl ist meist auf sieben beschränkt. Die Tafelschritte sind so klein, daß lineare Interpolation möglich ist. Die dabei nötigen Differenzen 1. Ordnung sind beigegeben. Die Einrichtung der Tafeln ist für jedermann verständlich. Autor und Verlag bieten die Gewähr für die Korrektheit der Formeln und die schöne Darstellung.

N. Hofreiter, Wien

The Statistical Approach to X-Ray Structure Analysis. Von *V. Vand* und *R. Pepinsky*. Verlag: X-Ray and Crystal Analysis Laboratory, Dept. of Physics, The Pennsylvania State University. 1953. $ 1.50.

An Hand kritischer Überlegungen und relativ einfacher Molekülstrukturen wird gezeigt, daß die von *Hauptman* und *Karle* angegebene statistische Lösung des Phasenbeziehungsproblems der Röntgenstrukturanalyse nicht allgemein gültig ist, ja unter Umständen schon bei vier Atomen pro Elementarzelle versagt. Dort, wo die statistische Lösungsmethode anwendbar ist — es wird gezeigt, wie sie in gewissem Maße der *Harker*-Methode äquivalent ist — scheint sie gegenüber den bisher üblichen Verfahren nicht viel Neues zu bieten.

F. Blaha, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Grundlagen der Elektronenoptik

Von

Dr. Walter Glaser

o. Professor an der Technischen Hochschule Wien

Mit 445 Textabbildungen. X, 699 Seiten. Gr.-8°. 1952

Ganzleinen S 720.—, DM 120.—, $ 28.60, sfr. 124.—

„Der Verfasser, der durch seine erfolgreichen Arbeiten zur Theorie der Elektronenoptik bekannt ist, legt ein Werk vor, an dem er mehr als 15 Jahre gearbeitet hat und zu dessen Ausbau ihm jahrelang Vorlesungen über Elektronenoptik Anreiz und Gelegenheit gaben. Es entstand ein Buch, das dem Autor zwar auf die ‚eigentlichen Probleme' beschränkt erscheint, das aber desungeachtet den größten Teil der theoretischen Elektronenoptik in den Kapiteln ‚Abbildungsfehler der Gaußschen Dioptrik', ‚Theorie der geometrischen Aberration', ‚Elektronenoptik und Wellenmechanik' enthält. Diese ‚Grundlagen' werden für den, der sich in die Theorie und Methodik gründlich einarbeiten will, eine sehr eingehende und solide Schulung sein. ... Die theoretische Elektronenoptik, soweit sie geometrisch-optische Fragen betrifft, hat mit dem Glaserschen Buch ein modernes Nachschlagewerk, für das alle Elektronenoptiker dem Verfasser dankbar sein werden. Der Inhalt macht es zum wertvollen Bestandteil jeder großen Bibliothek..."

ETZ Elektrotechnische Zeitschrift

Gasdynamik

Von

Dr. Klaus Oswatitsch

Dozent an der Königl. Technischen Hochschule in Stockholm, früherer wissenschaftlicher Mitarbeiter am Kaiser-Wilhelm-(Max-Planck-)Institut für Strömungsforschung in Göttingen

Mit 300 Textabbildungen und 3 Tafeln. XIII, 456 Seiten. Gr.-8°. 1952

Ganzleinen S 468.—, DM 78.—, $ 18.60, sfr. 80.—

„...Infolge seiner langjährigen Tätigkeit als Mitarbeiter von *Prandtl* sowie später im Auslande war es dem Verfasser möglich, das auf dem Gebiete der kompressiblen Strömungen im In- und Auslande angesammelte Wissen — mit eigenen Beiträgen versehen und unter Berücksichtigung des jüngsten Schrifttums — darzustellen. In gefälliger Ausführung und mit pädagogischem Geschick sind den allgemeinen theoretischen Ableitungen die anschaulichen Deutungen und die praktischen Anwendungen — oft mit besonderer Eigenwilligkeit — gegenübergestellt worden..." *VDI-Zeitschrift*

„...Das Buch kann allen, die mit gasdynamischen Problemen zu tun haben, nur wärmstens empfohlen werden, seien es nun Mathematiker, Physiker oder Ingenieure. Sehr wertvoll sind für alle, die tiefer in dieses Wissensgebiet eindringen wollen, die recht umfangreichen Literaturangaben, die sich am Schluß eines jeden Kapitels befinden." *Die Naturwissenschaften*

Zu beziehen durch jede Buchhandlung